

Plan 431 MÁSTER EN INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS

Asignatura 52388 ASPECTOS MATEMATICOS DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

Tipo de asignatura (básica, obligatoria u optativa)

Optativa

Créditos ECTS

6 ECTS

Competencias que contribuye a desarrollar

2.1 Competencias Generales

G1.- Conocimiento del método científico.

Conocer el método científico, en particular en el ámbito de las Matemáticas, formulando modelos e hipótesis de trabajo relevantes y planificando el análisis en relación con dichas hipótesis y la discusión de las conclusiones, de modo que se pueda avanzar en el conocimiento de las Matemáticas.

G2.- Competencia para aplicar los conocimientos adquiridos.

Es la capacidad para aplicar los conocimientos técnicos adquiridos, de forma coherente y profesional, sobre todo en contextos novedosos o en constante renovación, que impliquen la realización de una actividad matemática.

G3.- Capacidad crítica, de análisis y síntesis, y capacidad de interpretación.

Ser capaz de emitir juicios críticos sobre propuestas, hipótesis y validez científica de las conclusiones, así como sintetizar la presentación de propuestas y resultados, en el ámbito de las Matemáticas y de sus aplicaciones.

G4.- Competencias metodológicas.

Es la capacidad para elegir la metodología más adecuada para el desarrollo de la investigación de un problema, adaptándola al contexto en el que se origina el problema.

G5.- Capacidad para valorar la originalidad y creatividad.

Es la competencia para reconocer la originalidad en la concepción, formulación y resolución de problemas, sobre todo en el ámbito de la investigación matemática.

G6.- Capacidades de comunicación.

Ser capaz de presentar, de forma oral y escrita, y tanto ante públicos especializados como no especializados, resultados avanzados de investigación en Matemáticas, teniendo en cuenta los antecedentes en la investigación, las hipótesis de trabajo, los desarrollos y las conclusiones.

G8.- Capacidad para el uso de las nuevas tecnologías.

Adquirir destrezas generales en el uso de las nuevas tecnologías en el ámbito de la actividad matemática, facilitando su utilización en ámbitos diversos, así como el conocimiento de las herramientas informáticas disponibles más importantes.

G9.- Desarrollar el interés por la formación permanente.

Promover un interés permanente para ampliar conocimientos y el desarrollo de un perfil profesional específico, mediante el estudio, la reflexión y la investigación.

G10.- Capacidad de aprendizaje autónomo.

Adquirir las destrezas necesarias para el aprendizaje autónomo en el ámbito de las Matemáticas, conociendo las fuentes de conocimiento para dicho aprendizaje y su utilización, y motivando el aprendizaje a lo largo de la vida en el ejercicio de la actividad matemática.

G11.- Competencias para la internacionalización de la actividad profesional en Matemáticas.

Adquirir competencias que favorezcan el desarrollo de una actividad profesional en Matemáticas en contextos internacionales, especialmente mediante el uso de un idioma extranjero, usualmente el inglés, para la comunicación en el ámbito científico internacional de los resultados de la actividad investigadora.

2.2 Competencias Específicas

E1.- Adquisición de destrezas técnicas generales en el ámbito de una o varias disciplinas Matemáticas.

Comprende esta competencia la capacidad de utilización de forma profesional del lenguaje y de las técnicas avanzadas propias de algunas de las especialidades de las Matemáticas, para favorecer la interpretación fluida de las fuentes especializadas de dichas disciplinas y la formulación adecuada de nuevos problemas en el ámbito de dicha especialidad.

- E2.- Capacidad de comprensión de las bases teóricas y técnicas en las que se apoyan los conceptos y métodos de las materias propias de alguna de las especialidades de las Matemáticas.  
Comprende esta competencia la adquisición del corpus teórico que sustenta los conceptos y métodos de las materias propias de alguna de las especialidades de las Matemáticas, y la capacidad para un manejo experto y fluido de dichos conocimientos.
- E4.- Capacidad y destrezas para la gestión de las fuentes de la investigación en Matemáticas.  
Comprende esta competencia la capacidad del estudiante para la búsqueda y gestión de documentación y bibliografía especializada, en el ámbito específico de la especialización en Matemáticas que le sea propia; el uso racional y crítico de ésta para determinar el estado del arte en un determinado problema, y el dominio de los recursos bibliográficos pertinentes.
- E5.- Capacidad de aplicar y adaptar los modelos teóricos y las técnicas específicas tanto a problemas abiertos en su línea de especialización, como a problemas provenientes de otros ámbitos ya sean científicos o técnicos.  
Competencia para adaptar los modelos teóricos propios de cada una de las disciplinas de las Matemáticas para el estudio de problemas abiertos relacionados o para el análisis de otros problemas provenientes de los ámbitos científicos y tecnológicos.
- E6.- Capacidad de analizar problemas, detectando el posible uso de modelos matemáticos para contribuir a su comprensión y resolución.  
Comprende esta competencia la capacidad analítica frente a nuevas situaciones para identificar la aplicación de modelos matemáticos, existentes o de nuevo diseño, que contribuyan a la comprensión y solución de los problemas planteados.
- E7.- Capacidad de defender trabajos de investigación avanzados en el ámbito de sus líneas de especialización así como de mantener debates científicos sobre los mismos, ya sean estos propios o adquiridos.  
Capacidad estrechamente vinculada a la competencia de una buena comunicación científica, en el ámbito propio de la especialización adquirida, tanto para defender las tesis propias como para debatir con juicio crítico con terceros, en una relación entre pares.
- E8.- Capacidad de discernir entre las diferentes orientaciones de las técnicas específicas que concurren en la comprensión y resolución de un problema, comprendiendo la oportunidad y el uso de cada una de ellas individualmente así como la cooperación entre ellas de cara a la resolución global del problema.
- E9.- Capacidad de comprender nuevos avances y perspectivas científicas en el ámbito de la investigación en las líneas de su especialización.  
Competencia para comprender la formulación de nuevos avances, en el ámbito de la investigación propio de cada disciplina de las Matemáticas, y las perspectivas que plantean.
- E10.- Capacidad de detectar líneas de trabajo e investigación emergentes en el ámbito de las Matemáticas o de sus aplicaciones, identificando la relación, origen e influencia con el estado de conocimiento propio de cada una de las especializaciones de las Matemáticas.  
Competencia para reconocer líneas de investigación emergentes en el ámbito de las Matemáticas o de sus aplicaciones, identificando las interrelaciones existentes con cada una de las especialidades.
- E11.- Capacidad para modelar matemáticamente fenómenos de la realidad y describir, en el ámbito de esos fenómenos, la relevancia de los resultados matemáticos.  
Comprende esta competencia la capacidad para proponer y ajustar modelos matemáticos, deterministas o estocásticos, continuos o discretos, en el estudio de problemas concretos, estudiando sus propiedades y la teoría matemática que sustenta su uso.
- E12.- Capacidad para el ajuste de modelos matemáticos.  
Mediante esta competencia el alumno podrá valorar la idoneidad de un modelo matemático en un problema concreto, estudiando sus propiedades y manejando las herramientas de ajuste y diagnóstico necesarias.
- E13.- Capacidad para la utilización de las nuevas tecnologías en el ámbito de la investigación en Matemáticas.  
La potencia de cálculo disponible con las nuevas tecnologías ha supuesto en el quehacer matemático la incorporación de una herramienta de gran potencia para explorar la frontera del conocimiento, en todas y cada una de las disciplinas de las Matemáticas, así como en sus aplicaciones. Con esta competencia el alumno podrá utilizar métodos computacionales, según el ámbito de estudio de su especialidad, en la investigación matemática.
- E14.- Conocimiento con carácter general del software matemático de carácter profesional en las distintas disciplinas de las Matemáticas, y capacidad para orientar su aplicación según las situaciones y comprender sus limitaciones.  
Competencia para utilizar el conocimiento del software matemático profesional propio de cada especialidad para dirigir su aplicación en una variedad de situaciones, de forma profesional, comprendiendo sus limitaciones, y adaptándolo cuando sea necesario.
- E15.- Competencia para el diseño de técnicas computacionales y su análisis en los distintos ámbitos de las Matemáticas.  
Capacidad para el diseño y análisis de métodos computacionales novedosos, en los ámbitos de la Estadística, Análisis Numérico, Álgebra Computacional, Criptografía, Geometría, Optimización, y su utilización en las diversas aplicaciones en que son relevantes.
- E16.- Adquirir una visión global y comprensiva de la Investigación en Matemáticas.  
Comprende esta competencia la adquisición de una visión global de la investigación en Matemáticas, que valore la complementariedad de los enfoques matemáticos propios de cada disciplina para avanzar en el conocimiento, así como el estado actual de las líneas de investigación más activas en cada una de las áreas de conocimiento de las Matemáticas.
- E17.- Adquirir recursos y destrezas para la comunicación de resultados de investigación en Matemáticas de forma clara, ante audiencias especializadas y no especializadas.

## Objetivos/Resultados de aprendizaje

### 3.0 Objetivos

Dominio de los fundamentos matemáticos del análisis del método de elementos finitos en sus aplicaciones a problemas estacionarios y de evolución, así como las técnicas computacionales propias de la implementación de estos métodos. Adquisición por parte del alumno de suficiente experiencia computacional en el uso del método de elementos finitos para la solución de problemas de valores en la frontera y de valores iniciales y frontera multidimensionales.

#### Objetivos de aprendizaje

1. Formulación débil de problemas elípticos de valores en la frontera.

El concepto de formulación débil. Espacios de funciones de Sobolev y propiedades importantes. La desigualdad de Poincaré-Friedrichs. El lema de Lax-Milgram.

2. Métodos Galerkin, Ritz, mínimos cuadrados, Petrov-Galerkin, etc...

Conocer las diferencias conceptuales entre distintos métodos de discretización basados en principios variacionales, Estimativos de error en la energía. Adquirir experiencia computacional sobre diferentes problemas modelos con FreeFem++.

3. Espacios de elementos finitos Lagrangianos. Elementos isoparamétricos.

El concepto de elemento finito. Clases de elementos finitos conformes más importantes. El concepto de elemento finito isoparamétrico. Adquirir experiencia computacional con diversos elementos finitos, valorando su efectividad.

4. Análisis del error en el método de elementos finitos. Cuadratura en el método de elementos finitos.

Conocer la teoría de interpolación en espacios de Sobolev para elementos afines. Conocer las extensiones de la formulación conforme: fórmulas y errores de cuadratura para elementos finitos.

5. Métodos mixtos de elementos finitos y su análisis. Elementos conformes no conformes.

Conocer la teoría de Babuska-Brezis-Levy para la formulación de problemas mixtos. Ejemplos de análisis de error. Adquirir experiencia computacional con distintos métodos mixtos sobre problemas modelo relevantes.

6. Formulación débil de problemas de evolución parabólicos.

Conocer la extensión de la metodología de elementos finitos para tratar problemas de evolución. Estimativos de error en el caso parabólico. Adquirir experiencia computacional discretizando con elementos finitos distintos problemas modelo parabólicos.

7. Adaptatividad. El método Galerkin discontinuo para problemas de evolución.

Estimativos a posteriori del error, indicadores de error y estrategias adaptativas. Ejemplos computacionales sobre problemas modelo. Métodos Galerkin discontinuos.

8. Utilización efectiva de software de elementos finitos (transversal a todo el programa).

Uso de software de distribución libre para adquirir experiencia computacional con el método de elementos finitos. Discusión de resultados numéricos y su relación con los resultados teóricos.

## Contenidos

### Contenidos

Estos comprenderán:

1. Formulación débil de problemas elípticos de valores en la frontera.

2. Métodos de Galerkin, Ritz, Mínimos cuadrados, Petrov-Galerkin, etc....

3. Espacios de elementos finitos Lagrangianos. Elementos isoparamétricos.

4. Análisis del error en el método de elementos finitos. Cuadratura en el método de elementos finitos.

5. Métodos mixtos de elementos finitos y su análisis. Elementos conformes y no conformes.

6. Formulación débil de problemas de evolución parabólicos.

7. El método Galerkin discontinuo para problemas de evolución. Adaptatividad.

8. Utilización efectiva de software de elementos finitos: PDETOOL, FreeFem++, Fenics, etc... (transversal a todo el programa docente)

## Principios Metodológicos/Métodos Docentes

### Metodología docente:

La metodología docente está motivada por unos objetivos de aprendizaje que se centran: primero, en familiarizar con los conceptos fundamentales que sustentan el análisis del método de elementos finitos; segundo proporcionar una amplia experiencia computacional que permita valorar la efectividad de estos métodos en diferentes problemas modelo.

Distingo cuatro tipologías de actividades académicas:

#### 1. La clase magistral o teórica:

Comprende la exposición ordenada del programa, exponiendo tanto aspectos teóricos como ejemplos completos en su desarrollo. La formalización se reduce al mínimo indispensable para abordar de la forma más directa las demostraciones, dando una perspectiva completa de los elementos de análisis. Se utilizará frecuentemente el recurso de asignar lecturas de los aspectos técnicos para agilizar la exposición del programa.

#### 2. La clase de problemas:

Se propondrá en todas las unidades colecciones de ejercicios que servirán para asentar los conceptos estudiados. Algunos problemas serán de naturaleza técnica y servirán de complemento al material expuesto en el programa.

En la clase de problemas se abordará la solución completa por el profesor o por los alumnos de una selección de

estos ejercicios.

### 3. El laboratorio de informática:

En este tipo de clase se mostrará el funcionamiento de diferentes programas que implementan los métodos estudiados sobre problemas elegidos adecuadamente. También será un espacio en el que los alumnos podrán abordar parcialmente la realización de las prácticas de laboratorio que se les proponga, pudiendo interactuar con el profesor o con otros alumnos para resolver dificultades de planteamiento.

### 4. La tutoría:

La tutoría es el intercambio entre los alumnos y el profesor en relación con cualquier aspecto de la asignatura, que incluye la aclaración de dudas y la solución de problemas no abordados en clase. Al ser la asignatura optativa no es esperable un grupo numeroso por lo que la tutoría se realizará en cinco sesiones de dos horas a lo largo de semestre a todo el grupo.

### 5. La tutoría individualizada:

Es la labor anterior que se realiza de forma individualizada a cada alumno o grupo reducido de alumnos en el despacho del profesor y fuera del horario lectivo del curso, generalmente en el horario previsto para ello. Este horario se fija provisionalmente de 17 a 19 horas los lunes, martes y miércoles aunque podrá variarse a lo largo del curso si surgieran circunstancias que lo justificaran.

## Criterios y sistemas de evaluación

### Evaluación

La evaluación se basa en la recopilación de trabajos de los alumnos, en su participación en el aula y en el examen global de la asignatura, si éste procediera. La evaluación tenderá en lo máximo posible a una evaluación continua. La calificación final será el promedio de la calificación de las entregas de ejercicios, con un peso del 50%, y las calificaciones de prácticas realizadas en tiempo con el peso del 50% restante. Cuando no proceda la realización de un examen global, la calificación se basará enteramente en la de los trabajos encomendados..

## Recursos de aprendizaje y apoyo tutorial

### Bibliografía Básica.

En la Bibliografía Básica se seleccionan libros de texto con una orientación matemática acorde al enfoque del curso y algunas monografías de referencia imprescindible.

1. Johnson C. – Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method, Cambridge University Press, Cambridge, (1987)
2. Gockenbach M. S. – Understanding and Implementing the Finite Element Method, SIAM, Philadelphia, (2006).
3. Ciarlet Ph. G., - The Finite Element Method for Elliptic Problems, Classics in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, (2002)
4. Solin P., "Partial Differential Equations and the Finite Element Method", John Wiley and Sons, Hoboken, NJ (2006).
5. Thomée V. – Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems, Springer-Verlag, Berlín, (2006)
6. Brenner S. C., Ridgway Scott, L. – The Mathematical Theory of Finite Element Methods, 3<sup>rd</sup>. ed., Springer, Texts in Applied Mathematics 15, (2008)

## Calendario y horario

Dos sesiones de dos horas a la semana: inicialmente previstas de 12h a 14h, los lunes y los miércoles.

El calendario es el calendario académico de la Universidad de Valladolid, y en el curso 2016-2017 se extiende desde el 19 de septiembre de 2016 al 3 de febrero de 2017. Las clases presenciales terminarán el 19 de enero.

### Temporalización por bloques temáticos

Claves: T (Teoría), P (Problemas), L(Laboratorio), Tut. (Tutoría, Presentación de trabajos)

1ª Semana (del 19/09 al 23/09) – 4 sesiones (2T, 2L)

1. Formulación débil de problemas elípticos en la frontera.

2ª Semana (del 26/09 al 30/109) – 4 sesiones (2T, 2L)

1. Formulación débil de problemas elípticos en la frontera.

3ª Semana (del 3/10 al 7/10) – 4 sesiones (2T, 1L,1S)

2. Método Galerkin y Ritz.

4ª Semana (del 10/10 al 14/10) – 2 sesiones (1T,1L)

2. Estimativos de la energía.

5ª Semana (del 17/10 al 21/10) – 4 sesiones (2T,1L,1S)

3. Espacios de elementos finitos Lagrangianos.

6ª Semana (del 24/10 al 28/10) – 4 sesiones (2T, 1L,1S)

3. Espacios de elementos finitos no lagrangianos. Elementos isoparamétricos

7ª Semana (del 2/11 al 4/11) – 2 sesiones (2T)

4. Tª de interpolación en espacios de Sobolev para elementos afines.

8ª Semana (del 7/11 al 11/11) – 4 sesiones (2T,1L,1S)

4. Errores de cuadratura. Su efecto en el error en el método de elementos finitos.

9ª Semana (del 14/11 al 18/11) – 4 sesiones (2T,1L,1S)

5. Formulación de métodos mixtos.

10ª Semana (del 21/11 al 24/11) – 4 sesiones (2T, 1L,1S)

5. La condición de Babuska-Brezzi. Ejemplos computacionales con métodos de elementos mixtos.

11ª Semana (del 28/11 al 2/12) – 2 sesiones (2T)

6. Formulación débil de problemas parabólicos.

12ª Semana (7/12 al 9/12) – 2 sesiones (1L,1S)

6. Formulación débil de problemas parabólicos. Error de discretización.

13ª Semana (del 12/12 al 16/12) – 4 sesiones (2T,1L,1S)

7. Técnicas adaptativas en el método de elementos finitos.

14ª Semana (del 19/12 al 22/12) – 4 sesiones (2T, 1L, 1S)

7. Técnicas adaptativas en el método de elementos finitos.

15ª Semana (del 9/1/2017 al 13/1) - 3 sesiones (2T,1S)

8. Problemas y revisión del programa.

16ª Semana (del 16/1 al 19/1) – 4 sesiones (4 Ev)

Examen global (si procede): Prueba de 5 horas.

TOTAL: 27 T + 10S + 14L + 4E = 55 horas

## Tabla de Dedicación del Estudiante a la Asignatura/Plan de Trabajo

### Tabla de dedicación del estudiante a la asignatura

#### ACTIVIDADES PRESENCIALES

Horas

#### TRABAJO PERSONAL DEL ALUMNO

Horas

Clases teóricas

30

Estudio autónomo individual o en grupo

70

Resolución de problemas en grupos reducidos

Preparación y redacción de ejercicios u otros trabajos

15

Clases con ordenador en el aula de informática

10

Programación/experimentación u otros trabajos con ordenador/laboratorio

10

Tutorías dirigidas y seminarios

10

Documentación: consultas bibliográficas, Internet...

Sesiones de evaluación

5

Preparación de exámenes

Total presencial

55

Total personal

95

En resumen, por cada hora presencial de clase magistral el alumno deberá dedicar dos horas y media de trabajo adicional. Por cada hora presencial de clase de problemas el alumno deberá dedicar hora y media adicional. Para la programación de los métodos numéricos estudiados el alumno deberá reservar hasta un máximo de 10 horas a lo largo del trimestre.

#### Entregas de problemas, prácticas de laboratorio y pruebas parciales de evaluación

La evaluación continua se implementará mediante la recopilación de distintas evidencias sobre el estudio y el aprovechamiento de las clases. Por la naturaleza técnica de los contenidos del programa, será muy importante el intercambio de los alumnos con el profesor en relación con las dudas que se van suscitando con el estudio. Este intercambio se promoverá también en las clases magistrales mediante la exposición de resultados que previamente se han trabajado con lecturas de bibliografía adecuada.

Provisionalmente, a falta de la coordinación con las entregas y pruebas parciales de evaluación en otras asignaturas del curso, se programarán:

1. Tres ejercicios computacionales en el Laboratorio de Informática. Para su valoración positiva estas prácticas comprenderán la entrega antes de una fecha límite de una memoria junto con los ficheros fuente de los programas realizados. Esta fecha límite será de 3 semanas desde la fecha de propuesta del ejercicio.

2. Tres entregas de hojas de ejercicios. Para su valoración positiva las entregas deberán realizarse antes de una

---

fecha límite, que será de 7 días desde la fecha de propuesta de los ejercicios.

Se promoverá la elaboración cooperativa entre varios alumnos de las soluciones de los ejercicios, aunque las entregas deben hacerse de forma individual por cada alumno, evitando la réplica indiscriminada por de una misma memoria o solución. En caso de que sea necesario discernir el grado de implicación de un alumno en la solución presentada, se podrá exigir a éste una exposición de dicho trabajo explicando las razones de las decisiones tomadas. Todas las entregas serán calificadas y devueltas a los alumnos para establecer una retroalimentación en el proceso de aprendizaje de éste.

---

## Idioma en que se imparte

Castellano (sólo se valorará impartir el curso en inglés si hubiera presencia de alumnos extranjeros).

---