



### Proyecto/Guía docente de la asignatura

Se debe indicar de forma fiel como va a ser desarrollada la docencia en la Nueva Normalidad. Esta guía debe ser elaborada teniendo en cuenta todos los profesores de la asignatura. Conocidos los espacios y profesorado disponible, se debe buscar la máxima presencialidad posible del estudiante siempre respetando las capacidades de los espacios asignados por el centro y justificando todas las adaptaciones que se realicen respecto a la memoria de verificación. Si la docencia de alguna asignatura fuese en parte online, deben respetarse los horarios tanto de clase como de tutorías). La planificación académica podrá sufrir modificaciones de acuerdo con la actualización de las condiciones sanitarias.

<b>Asignatura</b>	Métodos Variacionales en Matemática Aplicada		
<b>Materia</b>	Modelización		
<b>Módulo</b>			
<b>Titulación</b>	Grado de Matemáticas		
<b>Plan</b>	394	<b>Código</b>	40022
<b>Periodo de impartición</b>	2021-2022	<b>Tipo/Carácter</b>	Optativa
<b>Nivel/Ciclo</b>	Grado	<b>Curso</b>	Cuarto
<b>Créditos ECTS</b>	6		
<b>Lengua en que se imparte</b>	Castellano		
<b>Profesor/es responsable/s</b>	Begoña Cano Urdiales		
<b>Datos de contacto (E-mail, teléfono...)</b>	bcano@uva.es		
<b>Departamento</b>	Matemática Aplicada		



## 1. Situación / Sentido de la Asignatura

---

### 1.1 Contextualización

---

El cálculo variacional y, posteriormente, el control óptimo, han sido desarrollados en la literatura por algunos de los mejores matemáticos de la historia movidos por numerosas aplicaciones prácticas. Dichos resultados pueden aplicarse hoy en día tanto en el ámbito de la física, ingeniería, economía, como en la medicina.

Se trata de una asignatura en la que los resultados se prueban con rigor matemático y en la que se resuelven ejemplos académicos interesantes, como el problema de la braquistócrona o la catenaria, se calculan las geodésicas de un cono, o se aborda el problema de ver la cantidad de glucosa que hay que suministrar a un paciente para que llegue a tener una cierta concentración en un tiempo mínimo.

### 1.2 Relación con otras materias

---

Se trata de una asignatura de optimización, al igual que otras asignaturas del grado como Investigación Operativa o Ampliación de Análisis Matemático, pero en concreto en esta asignatura se optimizan funcionales sobre un conjunto de funciones, algunas veces cumpliendo algunas restricciones algebraicas y otras cumpliendo ciertas ecuaciones diferenciales donde hay parámetros con los que se puede jugar.

### 1.3 Prerrequisitos

---

Es recomendable haber cursado las asignaturas de Ecuaciones Diferenciales y Matemática Aplicada a las Ciencias Sociales y Naturales. También, aunque en menor medida, Ampliación de Ecuaciones Diferenciales de tercer curso.



## 2. Competencias

Generales: G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10.

Específicas: E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9.

### 2.1 Generales

G1. Demostrar poseer y comprender conocimientos en el área de las Matemáticas a partir de la base de la educación secundaria general, a un nivel que, apoyado en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia en el estudio de las Matemáticas.

G2. Saber aplicar los conocimientos matemáticos a su trabajo o vocación de una forma profesional y poseer las competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas dentro del área de las Matemáticas.

G3. Tener la capacidad de reunir e interpretar datos relevantes, dentro del área de las Matemáticas, para emitir juicios que incluyan una reflexión sobre temas relevantes de índole social, científica o ética.

G4. Poder transmitir, tanto de forma oral como escrita, información, ideas, conocimientos, problemas y soluciones del ámbito matemático a un público tanto especializado como no especializado.

G5. Haber desarrollado aquellas habilidades de aprendizaje necesarias para emprender estudios posteriores en Matemáticas con un alto grado de autonomía.

G6. Utilizar bibliografía y herramientas de búsqueda de recursos bibliográficos en Matemáticas, incluyendo los recursos telemáticos.

G7. Leer y comprender textos científicos tanto en lengua propia como en otras de relevancia en el ámbito científico, especialmente la inglesa.

G8. Conocer y utilizar recursos informáticos de carácter general y tecnologías de la información y las comunicaciones como medios de comunicación, organización, aprendizaje e investigación.

G9. Gestionar de forma óptima, tanto en el trabajo individual como en equipo, el tiempo de trabajo y organizar los recursos disponibles, estableciendo prioridades, caminos alternativos e identificando errores lógicos en la toma de decisiones.

G10. Tener la capacidad de trabajar en equipo, aportando orden, abstracción y razonamiento lógico; comprobando o refutando razonadamente los argumentos de otras personas y contribuyendo con profesionalidad al buen funcionamiento y organización del grupo.



## 2.2 Específicas

---

E1. Comprender y utilizar el lenguaje matemático. Adquirir la capacidad para enunciar proposiciones en distintos campos de las Matemáticas, para construir demostraciones y para transmitir los conocimientos matemáticos adquiridos.

E2. Conocer demostraciones rigurosas de algunos teoremas clásicos en distintas áreas de las Matemáticas.

E3. Asimilar la definición de un nuevo objeto matemático, en términos de otros ya conocidos, y ser capaz de utilizar este objeto en diferentes contextos.

E4. Saber abstraer las propiedades estructurales (de objetos matemáticos, de la realidad observada, y de otros ámbitos) distinguiéndolas de aquellas puramente ocasionales y poder comprobarlas con demostraciones o refutarlas con contraejemplos, así como identificar errores en razonamientos incorrectos.

E5. Capacitar para el aprendizaje autónomo de nuevos conocimientos y técnicas.

E6. Resolver problemas de Matemáticas, mediante habilidades de cálculo básico y otras técnicas.

E7. Proponer, analizar, validar e interpretar modelos de situaciones reales sencillas, utilizando las herramientas matemáticas más adecuadas a los fines que se persigan.

E8. Planificar la resolución de un problema en función de las herramientas de que se disponga y de las restricciones de tiempo y recursos.

E9. Utilizar aplicaciones informáticas de análisis estadístico, cálculo numérico y simbólico, visualización gráfica, optimización u otras para experimentar en Matemáticas y resolver problemas.

E10. Desarrollar programas que resuelvan problemas matemáticos utilizando para cada caso el entorno computacional adecuado.

E11. Identificar las diferentes fases del proceso de modelización matemática, diferenciando la formulación, análisis, resolución e interpretación de resultados.



### 3. Objetivos

Formular matemáticamente problemas de encontrar extremos de funcionales, con y sin restricciones o con la posibilidad de controlarlos de manera óptima. Resolver matemáticamente problemas como los mencionados anteriormente. Razonar y argumentar la solución dada a dichos problemas. Interactuar con otras disciplinas ofreciendo la aportación matemática. Comunicar ideas y resultados.





#### 4. Contenidos y/o bloques temáticos

##### Bloque 1: “Condiciones necesarias del Cálculo variacional”

Carga de trabajo en créditos ECTS: 2

###### a. Contextualización y justificación

Ligándolo con el cálculo en  $\mathbb{R}^n$ , se darán condiciones necesarias para que exista el mínimo, no de una función de  $\mathbb{R}^n$ , sino de un funcional sobre un cierto conjunto de funciones.

###### b. Objetivos de aprendizaje

Conocer y saber deducir dichas condiciones en muy diferentes ámbitos, además de saber deducir el funcional a minimizar a partir de cada problema físico.

###### c. Contenidos

- 1.- Cálculo de variaciones. Derivada de Gateux. Ecuaciones de Euler-Lagrange.
- 2.- Condiciones frontera naturales.
- 3.- Principio de Hamilton. Problema inverso.
- 4.- Problemas isoperimétricos.
- 5.- Aplicaciones a problemas de la Física.

###### d. Métodos docentes

Clases teóricas y prácticas en grupos reducidos.  
Seminarios con participación de los estudiantes.  
Sesiones de evaluación y auto-evaluación

###### e. Plan de trabajo

Se irán exponiendo de forma razonada los resultados teóricos en clase y los alumnos tendrán que realizar tanto ejercicios teóricos como prácticos para conseguir dominar la materia.

###### f. Evaluación

Se propondrán ejercicios a los alumnos para resolver en casa y exponer en clase. Su calificación formará parte de la evaluación continua, al igual que un examen en hora de clase a mitad de curso, en el que se evaluarán contenidos de este bloque. Además, en el examen final se evaluarán también los contenidos de este bloque.

###### g. Material docente

*Esta sección será utilizada por la Biblioteca para etiquetar la bibliografía recomendada de la asignatura (curso) en la plataforma Leganto, integrada en el catálogo Alma y a la que tendrán acceso todos los profesores y estudiantes. Es fundamental que las referencias suministradas este curso estén actualizadas y sean completas. Los profesores tendrán acceso, en breve, a la plataforma Leganto para actualizar su bibliografía*



recomienda (“Listas de Lecturas”) de forma que en futuras guías solamente tendrán que poner el enlace permanente a Leganto, el cual también se puede poner en el Campus Virtual.

### g.1 Bibliografía básica

J. David Logan , Applied mathematics, 4<sup>th</sup> Edition, Wiley, 2013.

### g.2 Bibliografía complementaria

Pierre Bérest , Calcul des variations : application à la mécanique et à la physique , Paris, Ellipses, 1997.

R. Courant D. Hilbert Methods of Mathematical Physics (I and II) Interscience Publishers, 1962, New York.

I.M. Gelfand, S.V. Fomin , Calculus of variations , Dover, 2000

### g.3 Otros recursos telemáticos (píldoras de conocimiento, blogs, videos, revistas digitales, cursos masivos (MOOC), ...)

### h. Recursos necesarios

Conocimiento de cálculo en varias variables, ecuaciones diferenciales y breves nociones de Física.

### i. Temporalización

CARGA ECTS	PERIODO PREVISTO DE DESARROLLO
2	Primera parte del curso.

## Bloque 2: “Condiciones suficientes del Cálculo variacional”

Carga de trabajo en créditos ECTS: 1,25

### a. Contextualización y justificación

A través de razonamientos de convexidad, se estudiarán condiciones suficientes que garantizan la existencia y posible unicidad de mínimos de funcionales sobre ciertos conjuntos de funciones.

### b. Objetivos de aprendizaje

Conocer y saber aplicar dichas condiciones, además de saber deducir el funcional a minimizar más adecuado en términos de una buena elección de variables en cada problema.

### c. Contenidos

- 1.- Convexidad. Condiciones suficientes para garantizar existencia y/o unicidad de máximos o mínimos.
- 2.- Diversas aplicaciones, en particular al cálculo de geodésicas.



#### d. Métodos docentes

---

Clases teóricas y prácticas en grupos reducidos.  
Seminarios con participación de los estudiantes.  
Sesiones de evaluación y auto-evaluación

#### e. Plan de trabajo

---

Se irán exponiendo de forma razonada los resultados teóricos en clase y los alumnos tendrán que realizar tanto ejercicios teóricos como prácticos para conseguir dominar la materia.

#### f. Evaluación

---

Se propondrán ejercicios a los alumnos para resolver en casa y exponer en clase. Su calificación formará parte de la evaluación continua, al igual que un examen en hora de clase a mitad de curso, en el que se evaluarán contenidos de este bloque. Además, en el examen final se evaluarán también los contenidos de este bloque.

#### g Material docente

---

*Esta sección será utilizada por la Biblioteca para etiquetar la bibliografía recomendada de la asignatura (curso) en la plataforma Leganto, integrada en el catálogo Alma y a la que tendrán acceso todos los profesores y estudiantes. Es fundamental que las referencias suministradas este curso estén actualizadas y sean completas. Los profesores tendrán acceso, en breve, a la plataforma Leganto para actualizar su bibliografía recomendada ("Listas de Lecturas") de forma que en futuras guías solamente tendrán que poner el enlace permanente a Leganto, el cual también se puede poner en el Campus Virtual.*

##### g.1 Bibliografía básica

---

J.L. Troutman, Variational Calculus with Elementary Convexity, Springer, 1983.

##### g.2 Bibliografía complementaria

---

D. Liberzon, Calculus of Variations and Optimal Control Theory, Princeton, 2012.

##### g.3 Otros recursos telemáticos (píldoras de conocimiento, blogs, videos, revistas digitales, cursos masivos (MOOC), ...)

---

#### h. Recursos necesarios

---

Conocimiento de cálculo en varias variables, ecuaciones diferenciales y breves nociones de Física.

#### i. Temporalización

---

CARGA ECTS	PERIODO PREVISTO DE DESARROLLO
1,25	Segunda parte del curso



### **Bloque3: “Control óptimo”**

**Carga de trabajo en créditos ECTS:** 2,75

#### **a. Contextualización y justificación**

Intentando utilizar técnicas de cálculo variacional, se abordará el problema de cómo elegir un parámetro de un problema diferencial para minimizar un cierto funcional que puede depender tanto de la solución de ese sistema, como del parámetro.

#### **b. Objetivos de aprendizaje**

Conocer los principales resultados del control óptimo y saber aplicarlos a muy diferentes problemas.

#### **c. Contenidos**

- 1.- Control óptimo.
- 2.- Principio del máximo de Pontryaguin.
- 3.- Control optimal de sistemas lineales.
- 4.- Controles singulares.
- 5.- Condición de transversalidad.
- 6.- Aplicaciones.

#### **d. Métodos docentes**

Clases teóricas y prácticas en grupos reducidos.  
Seminarios con participación de los estudiantes.  
Sesiones de evaluación y auto-evaluación

#### **e. Plan de trabajo**

Se irán exponiendo de forma razonada los resultados teóricos en clase y los alumnos tendrán que realizar tanto ejercicios teóricos como prácticos para conseguir dominar la materia.

#### **f. Evaluación**

Se propondrán ejercicios a los alumnos para resolver en casa y exponer en clase. Su calificación formará parte de la evaluación continua. Además, en el examen final se evaluarán los contenidos de este bloque en una proporción importante.



### g Material docente

*Esta sección será utilizada por la Biblioteca para etiquetar la bibliografía recomendada de la asignatura (curso) en la plataforma Leganto, integrada en el catálogo Almena y a la que tendrán acceso todos los profesores y estudiantes. Es fundamental que las referencias suministradas este curso estén actualizadas y sean completas. Los profesores tendrán acceso, en breve, a la plataforma Leganto para actualizar su bibliografía recomienda ("Listas de Lecturas") de forma que en futuras guías solamente tendrán que poner el enlace permanente a Leganto, el cual también se puede poner en el Campus Virtual.*

#### g.1 Bibliografía básica

Enid R. Pinch , Optimal control and the calculus of variations , Oxford University Press, 1999.

#### g.2 Bibliografía complementaria

D.P. Bertsekas , Dynamic Programming and Optimal Control, Belmont (Massachusetts) : Athena Scientific, 2005.

R. Caputo, Foundations of dynamic economic analysis : optimal control theory and applications. Cambridge, 2005.

D. Léonard y N. Van Long, Optimal control theory and static optimization in Economics. Cambridge, 1992.

G. Lietmann, The Calculus of Variations and Optimal Control, Plenum Press, 1981.

D. Liberzon, Calculus of Variations and Optimal Control Theory, Princeton, 2012.

#### g.3 Otros recursos telemáticos (píldoras de conocimiento, blogs, videos, revistas digitales, cursos masivos (MOOC), ...)

### h. Recursos necesarios

Conocimiento de ecuaciones diferenciales.

### i. Temporalización

CARGA ECTS	PERIODO PREVISTO DE DESARROLLO
2,75	Tercera parte del curso

## 5. Métodos docentes y principios metodológicos

Clases teóricas y prácticas en grupos reducidos.

Seminarios con participación de los estudiantes.

Sesiones de evaluación y auto-evaluación

**6. Tabla de dedicación del estudiante a la asignatura**

ACTIVIDADES PRESENCIALES o PRESENCIALES A DISTANCIA <sup>(1)</sup>	HORAS	ACTIVIDADES NO PRESENCIALES	HORAS
Clases teórico-prácticas (T/M)	30	Estudio y trabajo autónomo individual	40
Clases prácticas de aula (A)	15	Estudio y trabajo autónomo grupal	
Laboratorios (L)		Preparación y redacción de ejercicios u otros trabajos	40
Prácticas externas, clínicas o de campo		Documentación: consultas bibliográficas, Internet...	10
Seminarios (S)	8	Preparación de exámenes	
Tutorías grupales (TG)			
Evaluación	7		
Total presencial	<b>60</b>	Total no presencial	<b>90</b>
TOTAL presencial + no presencial			<b>150</b>

(1) Actividad presencial a distancia es cuando un grupo sigue una videoconferencia de forma síncrona a la clase impartida por el profesor para otro grupo presente en el aula.

**7. Sistema y características de la evaluación**

Criterio: cuando al menos el 50% de los días lectivos del cuatrimestre transcurran en normalidad, se asumirán como criterios de evaluación los indicados en la guía docente. Se recomienda la evaluación continua ya que implica minimizar los cambios en la adenda.

INSTRUMENTO/PROCEDIMIENTO	PESO EN LA NOTA FINAL	OBSERVACIONES
Evaluación continua	30%	Consistirá en un examen en clase a mitad de curso y la entrega de ejercicios durante el curso para hacer en casa, y exponer en clase.
Examen final	70%	

**CRITERIOS DE CALIFICACIÓN**

- **Convocatoria ordinaria:** Se tomará el máximo entre la nota obtenida entre el criterio anterior y la que se obtenga calificando solamente el examen al 100%.
- **Convocatoria extraordinaria:** Igual que la convocatoria ordinaria con un nuevo examen final.



## 8. Consideraciones finales



