Curso 1: Singularidades de campos de vectores y foliaciones

Felipe Cano Torres (fcano@agt.uva.es)
Manuel M. Carnicer (carnicer@agt.uva.es)

1. Explosiones

Comenzaremos con un rápido repaso (o una rápida presentación para quien no los conozca) de los conceptos de carta, de compatibilidad holomorfa de cartas, de atlas holomorfo, de variedad analítica compleja y de aplicación holomorfa (o analítica) definida en variedades. Los primeros ejemplos evidentes de variedades serán $\mathbb{C}^n$, el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ y el producto de variedades.

En el producto $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ consideramos el conjunto

$$\widetilde{\mathbb{C}}^n = \{((x_1, \ldots, x_n), [z_1, \ldots, z_n]) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}} \ / \ x_i \cdot z_j = x_j \cdot z_i \ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\}$$

al cual se le dota de estructura de variedad analítica compleja, tomando como atlas el conjunto de cartas $\{(A_i, \varphi_i, \mathbb{C}^n)\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$; en donde llamamos A_i a la intersección de $\widetilde{\mathbb{C}}^n$ con el abierto $U_i = \{((x_1, \ldots, x_n), [z_1, \ldots, z_n]) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}} \ / \ z_i \neq 0\}$ y llamamos φ_i a la aplicación definida por

$$\varphi_i((x_1, \ldots, x_n), [z_1, \ldots, z_n]) = (\frac{z_1}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, x_i, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i})$$

para todo $((x_1, \ldots, x_n), [z_1, \ldots, z_n]) \in A_i$. Si llamamos π a la restricción a $\widetilde{\mathbb{C}}^n$ de la primera proyección $p_1 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^n$ tendremos una aplicación analítica $\pi : \widetilde{\mathbb{C}}^n \to \mathbb{C}^n$. El par $(\widetilde{\mathbb{C}}^n, \pi)$ recibe el nombre de explosión de $\mathbb{C}^n$ con centro $\mathbf{0}$. Si U es un abierto de $\mathbb{C}^n$ con $\mathbf{0} \in U$ y tomamos $\widetilde{U} = \pi^{-1}(U)$ entonces el par $(\widetilde{U}, \pi|_{\widetilde{U}})$ se llama explosión de U con centro $\mathbf{0}$.

Si M es una variedad analítica y $p \in M$, tomamos una carta (A, U, φ) de M con $p \in A$ y $\varphi(p) = \mathbf{0}$. Si $(\widetilde{U}, \tau)$ es la explosión de U con centro $\mathbf{0}$ podemos construir una nueva variedad $\widetilde{M}$ sustituyendo el abierto A por el abierto $\widetilde{U}$ y podemos definir una aplicación analítica $\pi : \widetilde{M} \to M$ que fuera de $\widetilde{U}$ es la identidad y que en $\widetilde{U}$ es la composición $\varphi \circ \tau : \widetilde{U} \to A$. La variedad $\widetilde{M}$ así obtenida es independiente (salvo isomorfismo) de la carta elegida y el par $(\widetilde{M}, \pi)$ se llama explosión de M con centro p.

2. Foliaciones singulares

Repasamos los conceptos de fibrado tangente y cotangente, de campo de vectores (holomorfo) y de 1-forma holomorfa. Recordamos el teorema de Frobenius, especialmente para el caso de dimensión 1 y codimensión 1. Definimos un atlas foliado en codimensión 1 en una variedad analítica M como una familia de pares $\{(U_i, \omega_i)\}_{i \in I}$ donde U_i es un abierto de M y ω_i una 1-forma holomorfa definida en M tales que la unión de los abiertos es todo M y que cumplen una condición de compatibilidad (para cada $i, j \in I$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ se tiene que existe una función holomorfa nunca nula g_{ij} definida en $U_i \cap U_j$ de forma que $\omega_i = g_{ij}\omega_j$), una condición de saturación (que se expresa geométricamente en el hecho de que el conjunto de puntos donde cada ω_i se anula tiene codimensión al menos 2) y una condición de integrabilidad (que se cumpla $\omega_i \wedge \mathrm{d}\omega_i = 0$ para todo $i \in I$). Una definición similar con campos de vectores en lugar de con 1-formas nos da el concepto de atlas foliado en dimensión 1 (donde no es necesaria la condición de integrabilidad ya que en dimensión 1 se cumple siempre). De forma similar a cómo un atlas holomorfo nos define una variedad, los atlas foliados nos definen foliaciones singulares en dimensión 1 y en codimensión 1. Cuando un par (U, ω) que cumple las condiciones de saturación e integración está en el atlas foliado de codimensión 1 o es compatible con él decimos que ω es un representante local de la foliación. Analogamente un campo de vectores definido en un abierto de la variedad en el caso de foliaciones de dimensión 1. Los puntos donde las 1-formas holomorfas (o, en su caso, los campos de vectores) se anulan nos definen el lugar singular de las foliaciones.

Dada una carta de la variedad analítica M con abierto de definición U y funciones coordenadas $z_1, \ldots, z_n$, decimos que es una carta distinguida de una foliación de codimensión 1 si la 1-forma $\mathrm{d}z_n$ es un representante local de la foliación. Análogamente, decimos que es una carta distinguida de una foliación de dimensión 1 si el campo de vectores $\frac{\partial}{\partial z_1}$ es un representante local de la foliación. Obviamente, todos los puntos que están en el abierto de una carta distinguida son puntos regulares de la foliación. En las cartas distinguidas se definen las placas y pegando placas obtenemos las hojas de la foliación, subvariedades analíticas de codimensión 1 o de dimensión 1 según lo sea la foliación. La descomposición de la variedad M menos el lugar singular de la foliación en hojas nos da la interpretación más geométrica de una foliación; de hecho dos foliaciones que tienen las mismas hojas son la misma foliación y de esta forma, en el caso de que la variedad ambiente tenga dimensión dos, se identifican foliaciones de dimensión 1 y foliaciones de codimensión 1. Así mismo, esta visión de la foliación nos permite algunos comentarios sobre la forma de definir foliaciones singulares en general, es decir en dimensión o en codimensión arbitraria.

3. Separatrices e integrales primeras

Dada una función holomorfa f, decimos que es una integral primera de una foliación de codimensión 1 si se tiene que $\mathrm{d}f \wedge \omega = 0$ para cualquier representante local ω de la foliación. Decimos que es integral primera de una foliación de dimensión 1 si se tiene que $D(f) = 0$ para cualquier campo de vectores D que sea representante local de la foliación. Esto equivale a decir que la función f es constante en las hojas de la foliación. Más aún, en el caso de foliaciones de codimensión 1 esto quiere decir que "básicamente"la 1-forma $\mathrm{d}f$ es un generador local de la foliación.

Decimos que la función es una separatriz de una foliación en codimensión 1 si para cada 1-forma ω que sea un generador local de la foliación existe una 2-forma holomorfa η de forma que $\mathrm{d}f \wedge \omega = f \cdot \eta$. Decimos que es una separatriz de una foliación de dimensión 1 si para cada campo de vectores D que es generador local de la foliación existe una función holomorfa g de forma que $D(f) = f \cdot g$. Geométricamente esto significa que la hipersuperficie $f = 0$ esta formada por hojas y singularidades de la foliación.

Introducimos también algunos invariantes locales de la foliación, como la multiplicidad algebraica, el número de Milnor o los autovalores de la parte lineal en las foliaciones de dimensión 1. Damos la forma de calcularlos a partir de la expresión en coordenadas de un generador local de la foliación.

4. Singularidades simples

A partir de ahora y hasta nueva orden nos limitaremos al caso de dimensión ambiente 2 (y por lo tanto hablaremos solo de foliaciones ya que se identifican las de dimensión 1 y de codimensión 1), aunque haremos comentarios en algunos casos sobre cómo se generaliza al caso de dimensión mayor. En dimensión ambiente 2 entonces, definimos una singularidad simple de una foliación como aquella que tiene parte lineal no nula y si λ, μ son los dos autovalores de esta parte lineal entonces no son ambos cero y su cociente no es un racional positivo. Este tipo de singularidades son las que aparecen al final del proceso de reducción de singularidades del que se habla en el siguiente apartado.

Comenzamos a describir ese proceso, que se hace por medio de explosiones, definiendo el transformado de una foliación por una explosión. Más concretamente, si tenemos una foliación $\mathcal{F}$ definida sobre una variedad analítica de dimensión dos M, si fijamos p un punto de M y llamamos $\pi : \widetilde{M} \to M$ a la explosión de M con centro p entonces definimos $\widetilde{\mathcal{F}}$ una foliación sobre $\widetilde{M}$ a la que llamamos transformado de $\mathcal{F}$ por la explosión de M. Tiene la propiedad (y está caracterizada por el hecho) de que allí donde π es un isomorfismo $\widetilde{\mathcal{F}}$ no es más que trasladar la foliación $\mathcal{F}$ por ese isomorfismo; y se define a base de tomar para cada 1-forma ω que es generador local de $\mathcal{F}$ el pull-back $\pi^*\omega$ y considerar ”básicamente”la foliación que estas 1-formas nos dan (la expresión ”básicamente”que ya se utilizó antes se refiere a que la 1-forma $\pi^*\omega$ podría no cumplir la condición de saturación y hay que modificarla ligeramente para que la cumpla). Distinguiremos dos tipos de explosiones: las dicríticas (aquellas en las que el divisor excepcional no es una separatriz de la foliación transformada) y las no dicríticas (aquellas en que sí lo es),

Para ver que las singularidades simples son las candidatas naturales a aparecer al final el proceso de reducción se prueba que al hacer la transformada por la explosión de centro p de una foliación para la que p es una singularidad simple, en el divisor excepcional (que es como llamamos a $\pi^{-1}(p) \subset \widetilde{M}$) sólo aparecen singularidades simples. Comentaremos otras propiedades de las singularidades simples.

5. Reducción de singularidades

Siguiendo con el estudio de las transformaciones que realiza una explosión, dada una función holomorfa que esta definida en un abierto que contiene al centro de la explosión, se define la transformada total y la transformada estricta de la función. Veremos que la transformada estricta de una separatriz de una foliación vuelve a ser una separatriz de la transformada de la foliación. Así mismo estudiamos la evolución de los invariantes locales que hemos definido asociados a una foliación y utilizando estas técnicas probamos el siguiente teorema (demostrado por A. Seidenberg en 1968):

Teorema 1. *Sea M una variedad analítica de dimensión dos, $\mathcal{F}$ una foliación definida sobre M y p un punto de M que es una singularidad de $\mathcal{F}$. Entonces existe una sucesión de aplicaciones holomorfas*

$$M_n \xrightarrow{\pi_n} M_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_2} M_1 \xrightarrow{\pi_1} M_0 = M$$

que cumple lo siguiente: π_1 es la explosión de M con centro p y cada π_j es la explosión de M_{j-1} con centro p_{j-1}; se tiene que $\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_j(p_j) = p$ para todo j; y si llamamos $\mathcal{F}_0$ a la foliación $\mathcal{F}$ y llamamos $\mathcal{F}_j$ al transformado por la explosión π_j de $\mathcal{F}_{j-1}$ entonces todas las singularidades de $\mathcal{F}_n$ cuya imagen por la composición de todas las aplicaciones es p son singularidades simples de $\mathcal{F}_n$.

6. Existencia de separatarices

Una de los resultados más importantes obtenido a partir de la reducción de singularidades es el conocido como Teorema de Camacho y Sad (fue probado por C. Camacho y P. Sad en 1982) que dice lo siguiente:

Teorema 2. *Sea M una variedad analítica de dimensión dos, $\mathcal{F}$ una foliación definida sobre M y p un punto de M que es una singularidad de F. Entonces existe una función holomorfa f definida en un entorno de p con $f(p) = 0$ que es una separatriz de la foliación $\mathcal{F}$.*

Daremos una prueba existencial de este teorema utilizando el índice de Camacho-Sad de una foliación a lo largo de una separatriz lisa. Sin embargo existe también una prueba constructiva de este teorema (debida a J. Cano en 1993) utilizando el Polígono de Newton de la foliación que también comentaremos.

7. Frobenius singular

El curso finalizará con el teorema conocido como Frobenius singular (probado por B. Malgrange, en 1976 el caso de codimensión 1 que aquí comentaremos y en 1977 el caso general).

Puesto que este teorema no tiene sentido en el caso de dimensión ambiente 2 (como veremos enseguida en ese caso las hipótesis nunca se satisfacen) volvemos a considerar el caso general. Así pues tenemos una variedad analítica compleja M de dimensión d y una foliación $\mathcal{F}$ de codimansión 1 sobre M. Llamemos $S(\mathcal{F})$ al conjunto de puntos singulares de $\mathcal{F}$, que es un subespacio analítico de M. Ya dijimos que la condición de saturación nos asegura que la codimensión de $S(\mathcal{F})$ es al menos 2. Observemos que si la dimensión de M fuese 2 entonces $S(\mathcal{F})$, si no es vacío, se reduce a puntos aislados y su codimensión es exactamente 2. Cuando la dimensión de M es mayor, lo que nos dice Frobenius singular es que en el caso de que la codimensión de $S(\mathcal{F})$ sea mayor que 2 entonces la foliación es relativamente sencilla. El enunciado es local. Más concretamente:

Teorema 3. *Sea M una variedad analítica compleja, p un punto de M, $\mathcal{F}$ una foliación de codimensión 1 sobre M y ω un generador local de $\mathcal{F}$ definido en un abierto que contiene a p. Si existe un entorno U de p de forma que $S(\mathcal{F})\cap U$ tiene codimensión mayor o igual que 3 entonces existen funciones holomorfas f, g definidas en un entorno de p de forma que $g(p) \neq 0$ y en el abierto común de definición se tiene que $\omega = g \cdot df$ (en particular f es una integral primera de la foliación).*

Bibliografía básica

[CS 87] Camacho, S. y Sad, P.*Pontos singulares de equações diferenciais analiticas.* 16 Coloquio Brasileiro de Matematica, IMPA 1987.

[CC] Cano, F. y Cerveau, D. *Notas a un curso de foliaciones.* Preprint.

[GR 65] Gunning, R. y Rossi, H *Analytic functions on several complex variables.* Prentice Hall, NJ 1965.

[LS 97] Lins Neto, A. y Scardua, B. *Folheações algébricas complexas.* 21 Coloquio Brasileiro de Matematica, IMPA 1997.

Curso 2: Cálculo formal para ecuaciones diferenciales

J.M. Aroca Hernández-Ros (aroca@agt.uva.es)
J. Cano (jcano@agt.uva.es)

1. Introducción

En este curso vamos a centrarnos en el estudio de local de ecuaciones diferenciales ordinarias y más precisamente en el método del Polígono de Newton para la búsqueda de soluciones formales. Si las soluciones formales son convergentes, entonces representan verdaderas soluciones de la ecuación. En el caso en que las soluciones no sean convergentes, estas soluciones formales contienen información de las soluciones mediante la teoría de la resumación. Un punto clave en la teoría de la resumación es el carácter Gevrey de las soluciones formales, punto que abordaremos durante este curso. En el caso en que la ecuación diferencial sea de primer orden y primer grado, daremos un teorema de existencia de solución convergente utilizando el método de Newton. Este mismo teorema será demostrado en el curso I. Finalmente extenderemos el estudio a la búsqueda de soluciones series formales que incluyen logaritmos y exponenciales.

2. El método de Newton-Puiseux para curvas y ecuaciones diferenciales

En esta primera sesión vamos a describir el método de Newton-Puiseux para encontrar soluciones formales de una ecuación diferencial ordinaria

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Vamos a suponer que f es una serie de potencias formales en las variables $x, y_0, y_1, \ldots, y_n$. En particular, podemos escribir

$$F = \sum A_{\alpha,\rho_0,\rho_1\ldots,\rho_n}\, x^\alpha\, y_0^{\rho_0}\, y_1^{\rho_1} \cdots y_n^{\rho_n}. \tag{2}$$

Siempre que se plantea una ecuación y se habla de buscar soluciones es necesario precisar el espacio donde se buscan las soluciones y qué significan estas soluciones. Nosotros vamos a describir nuestro problema dentro del marco del álgebra diferencial. Introduciremos las nociones de anillo diferencial, extensión de anillos diferenciales y polinomios diferenciales nociones que pueden encontrarse en [**Bui 94**]. Introduciremos de esta forma los cuerpos diferenciales de series de Laurent potencias formales con coeficientes en $\mathbb{C}$, el de series de Puiseux $\mathbb{C}((x))^*$, y finalmente los cuerpos de series de potencias formales con exponentes reales en un semigrupo finitamente generado o en un conjunto bien ordenado que denotaremos respectivamente por $\mathbb{C}((x^{\mathbb{R}}))^r$ y $\mathbb{C}((x^{\mathbb{R}}))^w$. Se tienen así la extensión de cuerpos diferenciales

$$\mathbb{C}((x))^* \subseteq \mathbb{C}((x^{\mathbb{R}}))^r \subseteq \mathbb{C}((x^{\mathbb{R}}))^w.$$

Consideraremos un polinomio diferencial $F \in \mathbb{C}((x))^w[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ y buscaremos las soluciones de la ecuación $F(y) = 0$ en el cuerpo diferencial $\mathbb{C}((x^{\mathbb{R}}))^w$.

De esta forma sabemos que los índices $(\alpha, \rho_0, \ldots, \rho_n)$ de F en la expresión (2) pertenecen a al conjunto $\Gamma \times \mathbb{N}^{n+1}$, siendo $\Gamma \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ bien ordenado. Esto nos permite definir la nube de puntos de F: Para cada índice $(\alpha, \underline{\rho}) = (\alpha, \rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_n)$ definimos el punto

$$P_{\alpha,\underline{\rho}} = (\alpha - \rho_1 - 2\rho_2 - \cdots - n\rho_n, \rho_0 + \rho_1 + \cdots + \rho_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}. \tag{3}$$

Definimos la nube de puntos de F como el conjunto $\mathcal{P}(F) = \{P_{\alpha,\underline{\rho}}; A_{\alpha,\underline{\rho}} \neq 0\}$, y finalmente llamaremos polígono de Newton de F a la envolvente convexa del conjunto

$$\bigcup_{P \in \mathcal{P}(F)} P + (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}),$$

y lo denotaremos por $\mathcal{N}(F)$. El hecho de que el conjunto Γ sea bien ordenado nos garantiza que $\mathcal{N}(F)$ tiene un número finito de vértices y lados. A cada lado L le asociamos un polinomio característico $\Phi_{(F,L)}(c)$ con coeficientes en $\mathbb{C}$ y a cada vértice le asociaremos un polinomio $\Psi_{(F,v)}(\mu)$ que llamaremos polinomio indicial. Definimos así el conjunto $\mathrm{NIC}(F)$ formado por los pares $(c, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ tales que: si μ corresponde a la inclinación de un lado L de $\mathcal{N}(F)$ entonces $\Phi_{(F,L)}(c) = 0$; si $\mu_i < \mu < \mu_{i+i}$, siendo μ_i y μ_{i+1} las inclinaciones de lados adyacentes de $\mathcal{N}(F)$, entonces $\Psi_{(F,v)}(\mu) = 0$. Observamos que este conjunto así definido es un conjunto semi-algebraico de $\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

Demostraremos entonces el resultado clave en el que se basa el método del polígono de Newton: Sea $y(x) = c\,x^{\mu} + \cdots$ una solución de la ecuación diferencial $F = 0$, entonces $(c, \mu) \in \mathrm{NIC}(F)$. Este resultado nos permite identificar los “comienzos” de posibles soluciones sin más que iterar el proceso: Si $y(x) = c_1\,x^{\mu_1} + c_2\,x^{\mu_2} + \cdots +$, con $\mu_1 < \mu_2 < \ldots$, es una solución de $F = 0$, entonces $(c_i, \mu_i) \in \mathrm{NIC}(F_i)$, para todo $i \geq 1$, siendo $F_1 = F$, y $F_{i+1}(y) = F_i(c_i\,x^{\mu_i} + y)$. Esta condición no sólo es necesaria sino que además es suficiente. Este resultado nos sugiere un método para encontrar las soluciones formales de $F = 0$:

Método del Polígono de Newton:
Entrada: Una polinomio diferencial $F(y)$.
Salida: Una serie formal $y(x) = \sum c_i\,x^{\mu_i}$, con $\mu_i < \mu_{i+1}$.

1. Definamos $F_1 = F$ y $\mu_0 = -\infty$.
2. Para $i = 1, 2, \ldots$ hacer
   - Encontrar $(c_i, \mu_i) \in \mathrm{NIC}(F_i)$ con $\mu_i > \mu_{i-1}$.
   - Poner $F_{i+1}(y) = F_i(c_i\,x^{\mu_i} + y)$.

Daremos ejemplos en los que dicho método no pueda llevarse a cabo pues en un paso dado no exista ningún $(c_i, \mu_i) \in \mathrm{NIC}(F_i)$ con $\mu_i > \mu_{i-1}$. Demostraremos que si el método puede llevarse a cabo, la salida obtenida es una verdadera solución y estudiaremos la naturaleza del conjunto de exponentes de las soluciones de $F = 0$.

3. Existencia, convergencia y carácter Gevrey de soluciones

Como ya se ha visto, en general es posible asegurar la existencia de soluciones series de potencias formales. Sin embargo, existen dos casos particulares en los que sí podemos asegurar su existencia:

- El teorema de Puiseux: Si $F(x, y)$ tiene orden cero, es decir, si es una curva.
- El teorema de Camacho-Sad: Si F tiene orden 1 y grado 1, es decir, si

$$F(x, y, y') = A(x, y) + B(x, y)\,y'.$$

Demostraremos estos dos teoremas utilizando el Polígono de Newton.

Por otra parte veremos que las soluciones formales de una ecuación diferencial no necesariamente son convergentes. Sin embargo daremos las claves para una demostración del teorema de Gevrey que asegura el el crecimiento de los coeficientes c_n de una solución están acotados por una función del tipo $KR^n n!^s$. Daremos un método para calcular el tipo Gevrey s y en particular demostraremos que las soluciones dadas en nuestras demostraciones del teorema de Puiseux y en el de Camacho-Sad, son convergentes.

4. Operadores diferenciales lineales

Estudiaremos las soluciones formales de las ecuaciones diferenciales lineales. Una ecuación diferencial lineal es una ecuación de la forma

$$a_0(x)\,y(x) + a_1(x)\,y'(x) + \cdots + a_n(x)\,y(x) = 0. \tag{4}$$

Introduciremos las nociones de punto regular, singular regular y singular irregular para la ecuación (4). Observaremos en primer lugar que si el punto $x = 0$ es no singular, utilizando el método del polígono de Newton que hemos descrito anteriormente podemos obtener una familia fundamental de soluciones de (4) dando de esta forma una demostración alternativa del clásico teorema de Cauchy.

A continuación estudiaremos el caso singular regular y observaremos cómo con la introducción de logaritmos en la serie formal podremos igualmente construir una familia fundamental de soluciones.

En el caso en que $x = 0$ sea singular irregular necesitaremos introducir no sólo logaritmos si no también exponenciales en las series solución. El teorema de Hukuhara-Turrittin dice que existe una familia fundamentas de soluciones formales de la ecuación (4) de la forma

$$\exp(\sum_{j=1}^{t} b_j x^{s_j}) \cdot x^{\gamma} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} c_{i,j} x^{\mu_i} \log(x)^j \right), \tag{5}$$

donde $s_1 < s_2 < \ldots < s_j < 0$, $\gamma \in \mathbb{C}$, $\mu_i < \mu_{i+1}$.

Daremos una demostración de este teorema utilizando tanto el polígono de Newton que hemos descrito en sesiones anteriores como el polígono de Newton de Malgrange-Ramis para operadores diferenciales.

5. Series generalizadas y transeries

Dado un anillo A y un grupo ordenado divisible Γ, se llama serie generalizada con coeficientes en A y exponentes en Γ a toda aplicación $s : \Gamma \to A$ de soporte bien ordenado que representaremos por $\sum s(\gamma)\, x^{\gamma}$ o simplemente $\sum s_{\gamma}\, x^{\gamma}$. Una serie generalizada se llama reticulada si su soporte es un trasladado de un semigrupo finitamente generado de Γ.

Las series generalizadas con coeficientes en A y exponentes en Γ forman un anillo $A[[x]]^{\Gamma}$ y las reticuladas un subanillo de éste que denotaremos por $A\{\{x\}\}^{\Gamma}$. Si A es un cuerpo, ambos anillos son cuerpos; si A es un cuerpo algebraicamente cerrado o real cerrado ambos cuerpos retienen esa propiedad.

Las transeries se construyen cerrando $\mathbb{R}\{\{x\}\}^{\mathbb{R}}$ respecto de la exponencial y el logaritmo, forman un cuerpo $\mathbb{T}$ ordenado y exponencial dotado de una valoración natural y de una derivación que se puede invertir dando lugar a una integración con buenas propiedades. En bastantes sentidos el cuerpo $\mathbb{T}$ es un buen cuerpo para resolver ecuaciones diferenciales.

Veremos igualmente aplicaciones de las series generalizadas no reticuladas para el estudio de algún tipo de valoraciones que juegan un papel importante en la resolución de ecuaciones diferenciales.

Bibliografía básica

[AC 01] Aroca, F., and Cano, J. Formal Solutions of Linear PDEs and Convex Polyhedra. *J. Symbolic Computation 32* (2001), 717–737.

[Bui 94] Buium, A. *Differential algebra and diophantine geometry.* Actualités Mathématiques. Paris: Hermann. 181 p. , 1994.

[Can 95] Cano, J. The Puiseux theorem for differential equations. In *Singularity theory (Trieste, 1991).* World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995, pp. 128–152.

[DMR 07] Deligne, P., Malgrange, B., and Ramis, J.-P. *Singularités irrégulières : Correspondance et documents.* Documents mathematiques. SMF, 2007.

[vdH 06] van der Hoeven, J. *Transseries and real differential algebra*, vol. 1888 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, 2006.

[Wal 62] Walker, R. J. *Algebraic curves.* Dover Publications Inc., New York, 1962.

Bibliografía complementaria

[ACJ 03] Aroca, F., Cano, J., and Jung, F. Power series solutions for non-linear PDE's. In *Proceedings of the 2003 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation* (New York, 2003), ACM, pp. 15–22 (electronic).

[Aro 00a] Aroca, J. *Singularities*, vol. 181. Birkhauser Progress in Mathematics, 2000, ch. Puiseux solutions of singular differential equations, pp. 128 – 145.

[Aro 00b] Aroca, J. *Singularities*, vol. 181. Birkhauser Progress in Mathematics, 2000, ch. Reduction of singularities for differential equations, pp. 109 – 128.

[BB 56] Briot, C., and Bouquet, J. Propriétés des fonctions définies par des équations différentielles. *Journal de l'Ecole Polytechnique 36* (1856), 133–198.

[Can 93a] Cano, J. An extension of the Newton-Puiseux Polygon construction to give solutions of pfaffian forms. *Ann. Inst. Fourier 43*, 1 (1993), 125–142.

[Can 93b] Cano, J. On the series defined by differential equations, with an extension of the Puiseux Polygon construction to these equations. *Analysis, Inter. Jour. Anal. its Appli. 13* (1993), 103–119.

[Fin 89] Fine, H. On the functions defined by differential equations, with an extension of the Puiseux Polygon construction to these equations. *Amer. Jour. of Math. XI* (1889), 317–328.

[For 00] Forsyth, A. R. *Theory of differential equations. (Part II. Ordinary equations, not linear.).* Cambridge: University Press. Vol. II; XI + 344 S.; Vol. III: X + 391 S. 8°. , 1900.

[GS 91] Grigoriev, D. Y., and Singer, M. Solving Ordinary Differential Equations in Terms of Series with Real Exponents. *Trans A.M.S. 327* (1991), 329–351.

[Inc 44] Ince, E. L. *Ordinary Differential Equations.* Dover Publications, New York, 1944.

[Tur 55] Turrittin, H. L. Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point. *Acta Math. 93* (1955), 27–66.

[vdH 97] van der Hoeven, J. *Asymptotique automatique.* PhD thesis, École Polytechnique, 1997.

Curso 3: Quelques techniques pour l'étude topologiques des singularités de feuilletages holomorphes en dimension deux

Jean-François Mattei (mattei@picard.ups-tlse.fr)
Université Paul Sabatier de Toulouse

Selon une idée de René Thom, le "centre organisateur" d'un germe de feuilletage holomorphe de $(\mathbb{C}^2, 0)$ devrait être le germe de courbe analytique plane, formée des feuilles analytiques (séparatrices). Celles-ci existent toujours, d'après le résultat classique de Camacho-Sad et sont génériquement en nombre fini. L'objet de ce cours est d'explorer cette approche de la topologie des singularités de feuilletages, sous des hypothèses très générales, en parcourant diverses techniques.

Les invariants topologiques les plus immédiats d'un feuilletage singulier, sont ceux de ses séparatrices. Aussi la première partie du cours sera consacré à la classification topologie des germes de courbe plane et au groupe de leurs C^0-automorphisme. Nous préciserons les résultats classiques d'invariance topologique de l'arbre de résolution et ses liens avec la classification des variétés (réelles) de dimension trois. Nous donnerons les conditions de réalisation d'isomorphismes algébriques entre les groupes fondamentaux des complémentaires de germes de courbes, par des homéomorphismes entre les espaces de résolutions respectifs.

Nous étudierons ensuite le problème de l'invariance topologique ou transversalement formelle des l'indices de Camacho-Sad des séparatrices et des composantes irréductibles des diviseurs exceptionnels.

Une troisième du cours concernera la notion de connexité feuilletée et la structure de "l'espace des bouts des feuilles".

Enfin nous introduirons la notion très générale de monodromie, son lien avec le pseudo-groupe d'holonomie et nous donnerons la trame de la démonstration de la conjecture de Cerveau-Sad, concernant l'invariance topologique des holonomies projectives.

Bibliografía

[1] C. Camacho et P. Sad, *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*, Annals of mathematics, **t. 115**, pages 579 à 595, (1982)

[2] D. Cerveau et P. Sad, *Problèmes de modules pour les formes différentielles singulières dans le plan complexe*, Commentarii Mathematici Helvetici, **t. 61**, pages 222 à 253, (1986)

[3] L. Conlon, *Differentiable Manifolds*, Birkhäuser advanced texts, 2nd ed., (2001)

[4] W. Fulton, *Algebraic Topology, A First Course*, Graduate Text in Mathematics 153, Springer, (1995)

[5] C. Godbillon, *Topologie algébrique*, Collection Méthode Hermann Paris, (1971)

[6] D.T. Lê, F. Michel et C. Weber, *Courbes polaires et topologie des courbes planes*, Ann. Sci. de l'École Normale Supérieure, **t. 24, no. 2**, pages 141 à 169, (1991)

[7] F. Loray, *Pseudo-groupe d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux*, preprint de l'Université de Rennes, disponible sur le site d'internet `hal.archives-ouvertes.fr/hal-00016434`, (2005)

[8] W. Magnus, A. Karrass et D. Solitar, *Combinatorial Group Theory*, Dover Books On Advances mathematics, New York, (2004)

[9] D. Marin et J.-F. Mattei, *Incompressibilité des feuilles de germes de feuilletages holomorphes singuliers*, Ann. Sci. de l'École Normale Supérieure, 4ème série, **t. 41, fasc. 6**, pages 855 à 903, (2008)

[10] J.-F. Mattei et R. Moussu, *Holonomie et intégrales premières*, Annales Scientifiques de l'E.N.S., **t. 13**, pages 469 à 523, (1980)

[11] J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Ann. of Math. studies, vl. 61 , Princeton University Press, (1968)

[12] W.D. Neumann et G.A. Swarup, *Canonical Decompositions of 3-Manifolds*, Geometry & Topology, **t. 1**, pages 21 à 40, (1997)

[13] F. Waldhausen, *Irreducible 3-Manifolds Which are Sufficiently Large*, Annals of Mathematics, **t. 87, no. 1**, pages 56 à 88, (1968)

[14] C.T.C. Wall, *Singular Points of Plane Curves*, London Mathematical Society Student Texts, vl. 63, Cambridge University Press, (2004)

[15] G.W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vl. 61, Springer-Verlag, (1978)

Curso 4: Teoría de Galois diferencial

José Manuel Aroca Hernández-Ros (aroca@agt.uva.es)
Jorge Mozo Fernández (jmozo@maf.uva.es)

1. Extensiones de Picard-Vessiot y grupo de Galois diferencial

En este curso trabajaremos indistintamente con sistemas de ecuaciones diferenciales lineales $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, donde $A \in \mathcal{M}_n(K)$, o con operadores diferenciales $L = \partial^n + a_{n-1}\partial^{n-1} + \cdots + a_0 \in K[\partial]$. Posteriormente veremos que estas dos aproximaciones son equivalentes. En todo momento K denotará un **cuerpo diferencial**, es decir, un cuerpo, de característica cero, dotado de una **derivación** $\partial : K \to K$, la cual verifica:

- $\partial(a + b) = \partial(a) + \partial(b)$.
- $\partial(ab) = a\partial(b) + b\partial(a)$.

El subconjunto

$$C(K) = \{x \in K \mid \partial(c) = 0\}$$

es el **cuerpo de constantes** de K.

Tratamos de construir un análogo a la teoría de Galois algebraica clásica, para este tipo de objetos. Al igual que en la teoría algebraica, uno de los objetivos será ver si un operador diferencial lineal admite soluciones en términos de funciones elementales y cuadraturas. Así, si F es una extensión diferencial de K, definimos el espacio de soluciones del operador L en F como

$$\mathsf{Sol}_F(L) = \{x \in F \mid L(x) = 0\},$$

y de manera análoga para sistemas. Si el cuerpo de constantes de F es el mismo que el de K, se mostrará:

Proposición 1. *$\mathsf{Sol}_F(L)$ es un K-espacio vectorial de dimensión menor o igual que n.*

El primer objetivo es construir una extensión diferencial F de K que contenga "todas las soluciones" de L. Así, definimos:

Definición 2. *Un anillo diferencial $R \supseteq K$ es un* ***anillo de Picard-Vessiot*** *de L si:*

1. *$C(R) = C(K)$.*
2. *R contiene n soluciones K-linealmente independientes de L. En el caso de sistemas, existe una matriz fundamental M de soluciones con coeficientes en R.*
3. *R es minimal con la propiedad anterior.*

Se muestra que un tal anillo es un dominio, y a su cuerpo de fracciones lo llamaremos **cuerpo de Picard-Vessiot** de L.

Teorema 3. *Si $C(K)$ es un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces siempre existe un cuerpo de Picard-Vessiot para L. Además, dos tales cuerpos son isomorfos.*

Una vez construida la extensión de Picard-Vessiot de una ecuación diferencial lineal, pasamos a definir el grupo de Galois de la ecuación: si F es la extensión de Picard-Vessiot sobre K, definimos:

$$G = \mathsf{Gal}(F|_K) = \{\sigma : F \to F \mid \sigma \text{ es automorfismo diferencial, y } \sigma|_K = id_K\}.$$

Si $C = C(K)$, Identificamos el grupo de Galois con un subgrupo de $\mathsf{GL}(n, C)$. Se tiene el siguiente teorema básico:

Teorema 4. *$\mathsf{Gal}(F|_K) \subseteq \mathsf{GL}(n, C)$ es un grupo algebraico.*

Un grupo algebraico será un subgrupo de $\mathsf{GL}(n, C)$ que es, a su vez, conjunto algebraico, es decir, que está definido por un número finito de igualdades polinomiales. En adelante supondremos que $C = \mathbb{C}$.

La condición de ser un grupo algebraico reduce enormemente las posibilidades. Así, si $n = 1$, los únicos subgrupos algebraicos de $\mathsf{GL}(1, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$ son los grupos de raíces de la unidad (finitos), y todo $\mathbb{C}^*$. Se dispone de clasificaciones de grupos algebraicos en dimensiones bajas.

Al igual que en la teoría de Galois clásica, tenemos una correspondencia de Galois, biyección entre subgrupos algebraicos de G, y subcuerpos diferenciales de F. La clave de la prueba de la existencia de esta biyección estriba en mostrar, como en la teoría de Galois algebraica clásica, que si $x \in F \setminus K$, existe un automorfismo diferencial σ de F tal que $\sigma(x) \neq x$. Además, si H es un subgrupo de G, se tiene que $H \lhd G$ si y sólo si el subcuerpo

$$F^H = \{x \in F \mid \forall\, \sigma \in H,\ \sigma(x) = x\}$$

es G-invariante.

2. Soluciones liouvillianas

Empleamos la teoría de Galois para determinar si una ecuación diferencial lineal admite solución por cuadraturas. Si K' es una extensión diferencial de K, se llamará **liouvilliana** si existe una cadena

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_r = K'$$

de extensiones diferenciales, tales que, si $1 \leq i \leq r$, $K_i = K_{i-1}(\alpha_i)$, donde:

(a) O bien α_i es algebraico sobre K_{i-1}.
(b) O bien $\alpha_i' \in K_{i-1}$ (α_i es una *primitiva*).
(c) O bien $\alpha_i'/\alpha_i \in K_{i-1}$ (α_i es una *exponencial*).

Abordamos el resultado siguiente:

Teorema 5. [**Kap 57**] *El sistema de ecuaciones lineales* $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ *sobre* K *es resoluble en términos de funciones liouvillianas si y sólo si la componente de la identidad* G^0 *de su grupo de Galois es resoluble.*

Para ello, mostramos previamente que G admite un número finito de componentes conexas, de las cuales, la que contiene a la identidad, G^0, es un subgrupo normal de G.

La base de la demostración del teorema anterior es el siguiente resultado relativo a grupos de matrices:

Teorema 6 (Lie-Kolchin). *Un grupo* $G \subseteq \mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$ *conexo es resoluble si y sólo si es triangularizable.*

Así, en particular, G tiene un subespacio invariante unidimensional. Esto implica que, si una ecuación $L(y) = 0$ tiene soluciones liouvillianas, entonces existe una solución z tal que z'/z es algebraica, de grado menor o igual que m, donde $m = [G : G_0]$. Este número m puede rebajarse eventualmente, teniéndose el resultado siguiente, que comentaremos:

Teorema 7 (Singer [**Sin 81**]). *Existe una función* $I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que, si un operador diferencial* L *de orden* n *tiene una solución liouvilliana, entonces tiene una solución* z *tal que* z'/z *es algebraica de grado a lo más* $I(n)$.

La resolubilidad del grupo de Galois es la base de diversos algoritmos sugeridos para determinar la existencia de soluciones liouvillianas. Así, si $n = 2$, consideremos la ecuación $y'' = ry$, con grupo de Galois $G \subseteq \mathsf{SL}(2, \mathbb{C})$. Se tienen los siguientes casos:

(a) G es triangularizable.
(b) G está contenido en el grupo diédrico infinito D_∞, y no se da el caso (a).

(c) G es finito, y no se dan los casos (a) y (b).
(d) $G = \mathsf{SL}(2, \mathbb{C})$.

De los algoritmos existentes, haremos una breve reseña del algoritmo de Kovacic [**Kov 86**].

3. Generadores del grupo de Galois

Consideremos ahora sistemas de ecuaciones diferenciales lineales sobre $\mathbb{C}(\{x\})$. Un sistema fundamental de soluciones es de la forma $F(x) \cdot x^L$, con F matriz de funciones definida en algún disco punteado $D_R^* = D_R \setminus \{0\}$. Distinguiremos entre singularidades regulares e irregulares. En el caso regular, mostramos lo siguiente:

Proposición 8. *Para un sistema de ecuaciones diferenciales lineales $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, son equivalentes:*

(a) *El sistema tiene una singularidad regular.*
(b) *El sistema es equivalente a uno del tipo $x\mathbf{y}' = A_0\mathbf{y}$, con $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*
(c) *Las soluciones del sistema tienen crecimiento moderado.*

Antes de pasar al caso irregular, mostraremos el lema del vector cíclico, que nos permite establecer la equivalencia entre sistemas y operadores. Es clásico que a partir de un operador diferencial L podemos construir un sistema $\mathbf{y}' = A_L\mathbf{y}$, siendo A_L la matriz compañera de L. El lema del vector cíclico es una suerte de inverso de este resultado.

Teorema 9 (Deligne [**Del 70**]). *Dado un sistema de ecuaciones diferenciales lineales $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, existe un cambio de variable $\mathbf{y} = P\mathbf{z}$ que lo convierte en $\mathbf{z}' = B\mathbf{z}$, donde B es la matriz compañera de algún operador diferencial.*

Construimos un sistema fundamental formal de soluciones:

Teorema 10 (Fabry-Hukuhara-Turrittin [**Tur 55, Was 87**]). *Un sistema fundamental formal de soluciones es de la forma $\hat{F}(t) \cdot t^L \cdot e^{Q(1/t)}$, con $t^p = x$, $\hat{F}(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}[[t]])$, $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $Q(1/t) = \mathrm{diag}(q_1(1/t), \ldots, q_n(1/t))$, $q_i(x) \in x \cdot \mathbb{C}[x]$, $L \cdot Q = Q \cdot L$.*

Los polinomios $q_i(1/t)$ son invariantes de la ecuación, y sus grados definen los niveles de la misma, que no son más que las pendientes del polígono de Newton-Malgrange del sistema, tal y como se ha construido en el curso *Cálculo formal para ecuaciones diferenciales.*.

El grupo de Galois local formal se puede construir a partir de esta estructura explícita del espacio de soluciones. Definimos para ello una serie de conceptos. En primer lugar procedemos a definir la **monodromía analítica**: en el caso regular ésta engendra el grupo de Galois como grupo algebraico (**teorema de Schlessinger**). Se ilustrará este caso regular comentando el cálculo de la monodromía para la ecuación hipergeométrica de Gauß [**Var 91**]:

$$x(1-x)y'' + (c - (a+b+1)x)y' - aby = 0.$$

Para otras ecuaciones clásicas, como las hipergeométricas confluentes, diversos cálculos del grupo de Galois pueden encontrase en la literatura ([**MR 90, DL 92**]).

En el caso irregular definimos la **monodromía formal** y el **toro exponencial**. Ambos bastan para generar el grupo de Galois diferencial formal.

Para el caso analítico, precisamos introducir, al menos brevemente, la noción de sumabilidad. Sin tiempo para entrar en detalle de esta teoría, nos limitaremos a enunciar una serie de resultados necesarios para comprender la construcción de los automorfismos de Stokes. Para más detalles sobre sumabilidad, remitimos al alumno a [**Bal 94, Bal 00, MR 92, Moz 01, PS 03**].

La sumabilidad nos permite representar analíticamente las series formales en sectores adecuados. A partir de esa noción, definimos las **matrices de Stokes**, las cuales codifican la diferencia entre dos determinaciones analíticas de una misma solución formal. Ilustramos esta situación con ejemplos típicos, como la ecuación de Euler, o la ecuación de Airy. Estas matrices de Stokes son elementos del grupo de Galois. El teorema fundamental es el siguiente:

Teorema 11 (Ramis [**MR 91**]). *El grupo de Galois $G \subseteq \mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$ de una ecuación lineal con coeficientes en $\mathbb{C}(\{x\})$ está generado, como grupo algebraico, por:*

(a) *La monodromía formal.*
(b) *El toro exponencial.*
(c) *Las matrices de Stokes.*

Bibliografía básica

[Bui 94] Buium, A. *Differential algebra and Diophantine geometry.* Actualités Mathématiques. Hermann, Paris, 1994.

[Mag 97] Magid, A.R. *Lectures on differential Galois theory.* AMS University Lectures Series vol. 7 (1997).

[Put 99b] van der Put, M. *Galois theory of differential equations, algebraic groups and Lie algebras.* J. Symb. Comp. **28**, 441–473 (1999).

[PS 03] van der Put, M. y Singer, M.F. *Galois theory of linear differential equations.* Springer. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **328** (2003).

[Sin 90] Singer, M.F. *An outline of differential Galois theory*, en *Computer algebra and differential equations* (E. Tournier, ed.) (1990), 3-57.

[Sin 06] Singer, M.F. *Introduction of the Galois Theory of Linear Differential Equations.* Notas de un curso impartido en la London Mathematical Society en 2006. Disponible en la web del autor.

Bibliografía complementaria

[Bal 94] Balser, W. *From divergent power series to analytic functions.* Springer LNM **1582** (1994).

[Bal 00] Balser, W. *Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations.* Springer Universitext (2000).

[CH 07] Crespo, T. y Hajto, Z. *Introduction to differential Galois theory.* Politechnika Krakowska (2007).

[Del 70] Deligne, P. *Équations différentielles à points singuliers réguliers.* Springer LNM **163** (1970).

[DL 92] Duval, A., Loday-Richaud, M. *Kovačič's algorithm and its application to some families of special functions.* Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. 3 (1992), no. 3, 211–246.

[Hae 87] Haefliger, A. *Local theory of meromorphic connections in dimension two (Fuchs theory)*, en A. Borel et al. *Algebraic D-modules.* Academic Press (1987), 129-149.

[HS 99] Hsieh, P.-F. y Sibuya, Y. *Basic theory of ordinary differential equations.* Springer Universitext (1999).

[Kap 57] Kaplansky, I. *An introduction to differential algebra.* Hermann (1957).

[Kov 86] Kovacic, J.J. *An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations.* Journal of Symbolic Computation, 2, 3–43 (1986).

[MR 90] Martinet, J. , Ramis, J.-P. *Théorie de Galois différentielle et resommation.*. En *Computer algebra and differential equations*, 117–214, Comput. Math. Appl., Academic Press, London, 1990.

[MR 91] Martinet, J., Ramis, J.-P. *Elementary acceleration and multisummability I.* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 54 (1991), no. 4, 331–401.

[Mal 79] Malgrange, B. *Sur la reduction formelle des équations diférentielles à singularités irrégulières.* Sin publicar originalmente (1979). Recientemente publicado en *Singularités irrégulières - Correspondence et documents* (Deligne, P., Malgrange, B. Ramis, J.-P., eds.). Société Mathématique de France (2007).

[MR 92] Malgrange, B., Ramis, J.-P. *Fonctions multisommables.* Ann. Inst. Fourier 42, 1 (1992), 1-16.

[Moz 01] Mozo Fernández, J. *Desarrollos asintóticos y sumabilidad.* Monografías del IMCA **20** (2001).

[Moz 06] Mozo Fernández, J. *Lecciones sobre ecuaciones diferenciales ordinarias.* Monografías del IMCA **42** (2006).

[Put 99a] van der Put, M. *Symbolic analysis of differential equations.* Capítulo 9 de *Some Tapas of Computer Algebra* (Cohen, A.M., Cuypers, H. y Sterk, H., eds.), Springer (1999).

[Sin 81] Singer, M.F. *Liouvillian solutions of n-th order homogeneous linear differential equations.* Amer. J. of Math. **103**, no. 4, 661–682 (1981).

[Tou 90] Tougeron, J.-C. *An introduction to the theory of Gevrey expansions and to the Borel-Laplace transform with some applications.* Notas de un curso de doctorado Rennes-Toronto (1990).

[Tur 55] Turrittin, H.L. *Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point.* Acta Math. 93, (1955). 27–66.

[UW 96] Ulmer, F. y Weil, J.-A. *Note on Kovacic's algorithm.* J. Symb. Comp. **22**, 179–200 (1996).

[Var 91] Varadarajan, V.S. *Meromorphic differential equations.* Exp. Mathematicae vol. 9, no. 2, 97–188 (1991).

[Was 87] Wasow, W. *Asymptotic expansions for ordinary differential equations.* Dover (1987).