

Singularidades de campos de vectores reales: perfil topológico (I)

Clementa Alonso González

VI Escuela Doctoral de Matemáticas PUCP-UVA 2013

Sea U un abierto del espacio euclídeo \mathbb{R}^n . *Un campo de vectores en U es una aplicación*

$$\begin{aligned}\xi : U &\rightarrow \mathbb{R}^n \simeq T_p\mathbb{R}^n \\ p &\mapsto \xi(p) = v_p\end{aligned}$$

Sea U un abierto del espacio euclídeo \mathbb{R}^n . Un *campo de vectores* en U es una aplicación

$$\begin{aligned} \xi : U &\rightarrow \mathbb{R}^n \simeq T_p\mathbb{R}^n \\ p &\mapsto \xi(p) = v_p \end{aligned}$$

En coordenadas cartesianas (x_1, x_2, \dots, x_n)

$$\xi = A_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + A_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}$$

donde A_i son funciones reales definidas en U .

En coordenadas cartesianas (x_1, x_2, \dots, x_n)

$$\xi = A_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + A_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}$$

donde A_i son funciones reales definidas en U .

Integrar un campo de vectores ξ :

Encontrar una *solución* o *curva integral*

Una curva parametrizada diferenciable $\gamma : I \rightarrow U$ en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que satisfaga en U el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = A_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

En otras palabras:

$$\gamma'(t) = \xi(\gamma(t)) \quad \forall t \in I.$$

Integrar un campo de vectores ξ :

Encontrar una *solución* o *curva integral*

Una curva parametrizada diferenciable $\gamma : I \rightarrow U$ en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que satisfaga en U el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = A_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

En otras palabras:

$$\gamma'(t) = \xi(\gamma(t)) \quad \forall t \in I.$$

Integrar un campo de vectores ξ :

Encontrar una *solución* o *curva integral*

Una curva parametrizada diferenciable $\gamma : I \rightarrow U$ en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que satisfaga en U el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = A_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

En otras palabras:

$$\gamma'(t) = \xi(\gamma(t)) \quad \forall t \in I.$$

Integrar un campo de vectores ξ :

Encontrar una *solución* o *curva integral*

Una curva parametrizada diferenciable $\gamma : I \rightarrow U$ en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que satisfaga en U el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = A_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

En otras palabras:

$$\gamma'(t) = \xi(\gamma(t)) \quad \forall t \in I.$$

Punto singular

Diremos que un punto $x \in U$ es un *punto singular* o *punto de equilibrio* del campo ξ si $\xi(x) = 0$. Los puntos no singulares son *puntos regulares*.

Pregunta

Dado un punto regular $x \in U$, ¿existe alguna curva integral de ξ que pase por $x \in U$?

Teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de EDOs



Existe un intervalo abierto maximal I_x y una solución maximal única γ_x con la misma clase de diferenciabilidad que los coeficientes A_i y tal que $\gamma(0) = x$.

Flujo de un campo de vectores

El conjunto $\Omega = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times U : t \in I_p\}$ es un abierto de \mathbb{R}^{n+1} y la aplicación

$$\Phi : \Omega \rightarrow U$$

dada por $\Phi(t, p) = \gamma_p(t)$, a la que llamaremos el *flujo del campo de vectores* ξ , tiene la misma clase de diferenciabilidad que ξ .

Pregunta

Dado un punto regular $x \in U$, ¿existe alguna curva integral de ξ que pase por $x \in U$?

Teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de EDOs



Existe un intervalo abierto maximal I_x y una solución maximal única γ_x con la misma clase de diferenciabilidad que los coeficientes A_i y tal que $\gamma(0) = x$.

Flujo de un campo de vectores

El conjunto $\Omega = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times U : t \in I_p\}$ es un abierto de \mathbb{R}^{n+1} y la aplicación

$$\Phi : \Omega \rightarrow U$$

dada por $\Phi(t, p) = \gamma_p(t)$, a la que llamaremos el *flujo del campo de vectores* ξ , tiene la misma clase de diferenciabilidad que ξ .

Pregunta

Dado un punto regular $x \in U$, ¿existe alguna curva integral de ξ que pase por $x \in U$?

Teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de EDOs



Existe un intervalo abierto maximal I_x y una solución maximal única γ_x con la misma clase de diferenciabilidad que los coeficientes A_i y tal que $\gamma(0) = x$.

Flujo de un campo de vectores

El conjunto $\Omega = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times U : t \in I_p\}$ es un abierto de \mathbb{R}^{n+1} y la aplicación

$$\Phi : \Omega \rightarrow U$$

dada por $\Phi(t, p) = \gamma_p(t)$, a la que llamaremos el *flujo del campo de vectores* ξ , tiene la misma clase de diferenciabilidad que ξ .

Pregunta

Dado un punto regular $x \in U$, ¿existe alguna curva integral de ξ que pase por $x \in U$?

Teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de EDOs



Existe un intervalo abierto maximal I_x y una solución maximal única γ_x con la misma clase de diferenciabilidad que los coeficientes A_i y tal que $\gamma(0) = x$.

Flujo de un campo de vectores

El conjunto $\Omega = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times U : t \in I_p\}$ es un abierto de \mathbb{R}^{n+1} y la aplicación

$$\Phi : \Omega \rightarrow U$$

dada por $\Phi(t, p) = \gamma_p(t)$, a la que llamaremos el *flujo del campo de vectores* ξ , tiene la misma clase de diferenciabilidad que ξ .

Trayectorias

Sea $\gamma : I \rightarrow U$ una solución maximal. Su imagen

$$\Gamma_\gamma = \{\gamma(t) : t \in I\} \subset U$$

dotada con la orientación inducida por γ será una *trayectoria* u *órbita* asociada a γ .

Podemos distinguir tres posibilidades para una solución maximal γ de ξ :

- 1 γ es una biyección en su imagen.
- 2 γ es constante.
- 3 γ es una función periódica.

Espacio de fases

Por *espacio de fases* de un campo de vectores entendemos el conjunto de todas las órbitas (órbitas orientadas regulares y puntos singulares) del mismo en el abierto U . Este conjunto es una partición de U . Diremos que esta partición es la *foliación generada por* ξ . La denotaremos \mathcal{F}_ξ .

Equivalencia topológica

Dados ξ_1 y ξ_2 dos campos de vectores definidos en abiertos respectivos U_1 y U_2 de \mathbb{R}^2 . Decimos que ξ_1 es *topológicamente equivalente* a ξ_2 si existe $h : U_1 \rightarrow U_2$ un homeomorfismo que envíe trayectorias de ξ_1 en trayectorias de ξ_2 preservando la orientación. Llamaremos a h *una equivalencia topológica* o C^0 -equivalencia.

Conjugación topológica

Si consideramos $\Phi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\Phi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ los flujos generados por los campos de vectores ξ_1 y ξ_2 respectivamente. Decimos que ξ_1 es *topológicamente conjugado* a ξ_2 si existe $h : U_1 \rightarrow U_2$ un homeomorfismo tal que

$$h(\Phi_1(t, x)) = \Phi_2(t, h(x)) \quad \forall (t, x) \in \Omega_1.$$

Llamaremos a h una *conjugación topológica* o C^0 -conjugación.

Objetivo 1

Clasificar, decir cuándo dos campos son localmente topológicamente equivalentes.

Objetivo 2

Determinación de un representante (también local) lo más sencillo posible del tipo topológico de un campo de vectores ξ .

Objetivo 1

Clasificar, decir cuándo dos campos son localmente topológicamente equivalentes.

Objetivo 2

Determinación de un representante (también local) lo más sencillo posible del tipo topológico de un campo de vectores ξ .

Teorema de rectificación de campos de vectores



Si $p \in U$ tal que $\xi(p) \neq 0$, entonces $\xi \sim \frac{\partial}{\partial x}$

Teorema de rectificación de campos de vectores



Si $p \in U$ tal que $\xi(p) \neq 0$, entonces $\xi \sim \frac{\partial}{\partial x}$

$$\xi = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\xi \rightsquigarrow L_0 \xi = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x}(0) & \frac{\partial A}{\partial y}(0) \\ \frac{\partial B}{\partial x}(0) & \frac{\partial B}{\partial y}(0) \end{pmatrix}$$

- 1 No degenerado
 - Hiperbólico
 - No hiperbólico
- 2 Degenerado
 - Semi-hiperbólico
 - Nilpotente
 - Parte lineal nula

$$\xi = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\xi \rightsquigarrow L_0 \xi = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x}(0) & \frac{\partial A}{\partial y}(0) \\ \frac{\partial B}{\partial x}(0) & \frac{\partial B}{\partial y}(0) \end{pmatrix}$$

- 1 No degenerado
 - Hiperbólico
 - No hiperbólico
- 2 Degenerado
 - Semi-hiperbólico
 - Nilpotente
 - Parte lineal nula

$$\xi = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

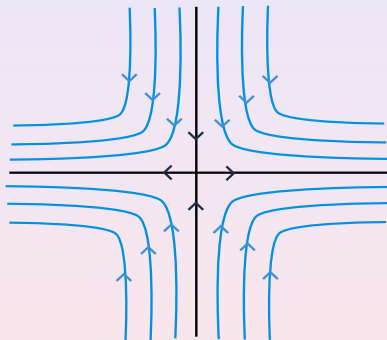
$$\xi \rightsquigarrow L_0 \xi = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x}(0) & \frac{\partial A}{\partial y}(0) \\ \frac{\partial B}{\partial x}(0) & \frac{\partial B}{\partial y}(0) \end{pmatrix}$$

- 1 No degenerado
 - Hiperbólico
 - No hiperbólico
- 2 Degenerado
 - Semi-hiperbólico
 - Nilpotente
 - Parte lineal nula

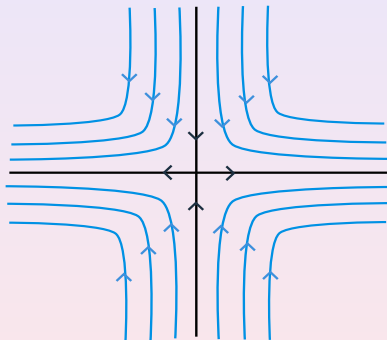
$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

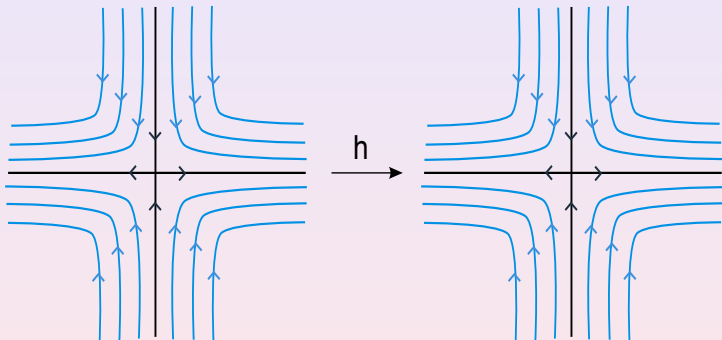
$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ con } \lambda < 0 < \mu. \text{ SILLA.}$$



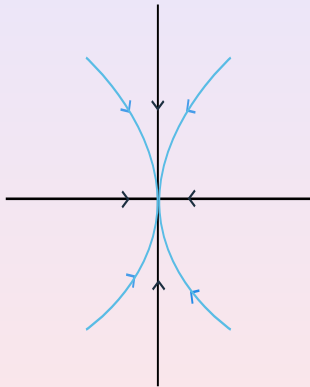
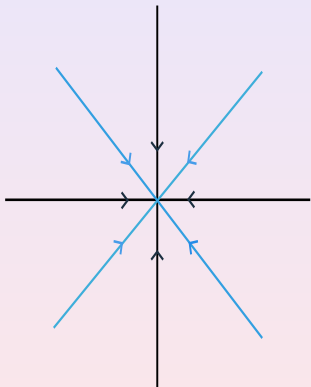
$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ con } \lambda < 0 < \mu. \text{ SILLA.}$$



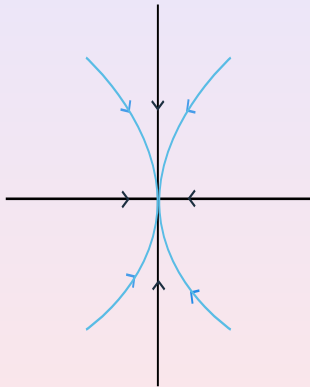
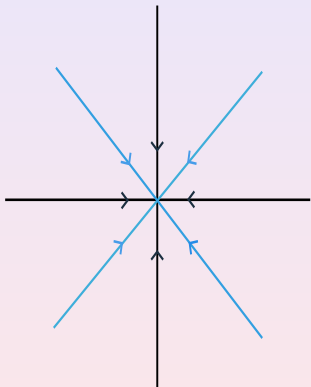
¿Son topológicamente equivalentes dos sillars?



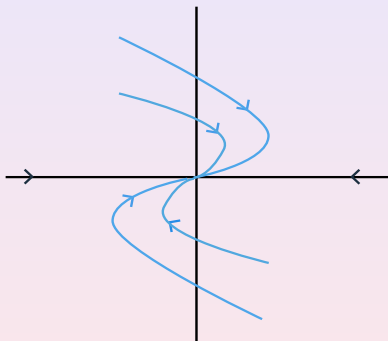
$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ con } \lambda \leq \mu < 0. \text{ NODO ESTABLE}$$



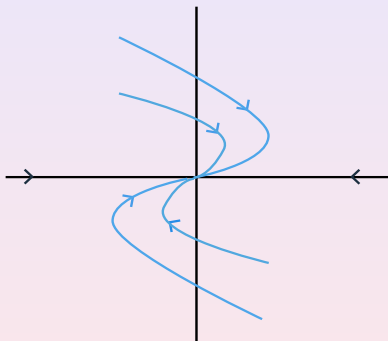
$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ con } \lambda \leq \mu < 0. \text{ NODO ESTABLE}$$



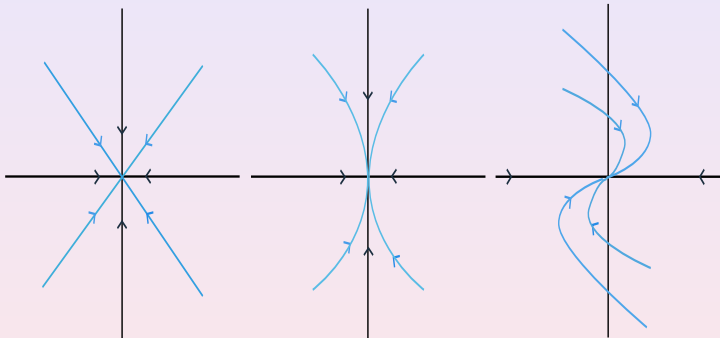
$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ con } \lambda < 0. \text{ NODO ESTABLE}$$



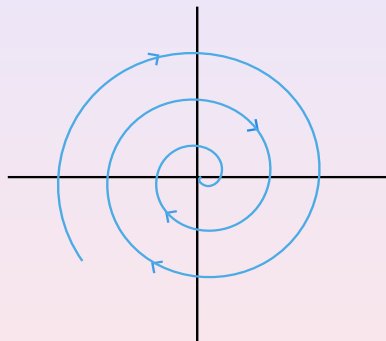
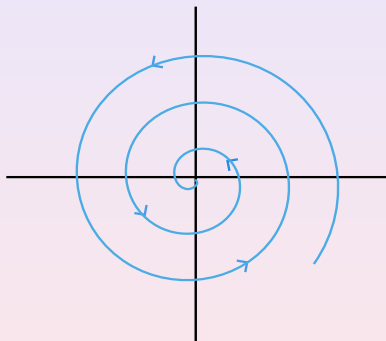
$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ con } \lambda < 0. \text{ NODO ESTABLE}$$



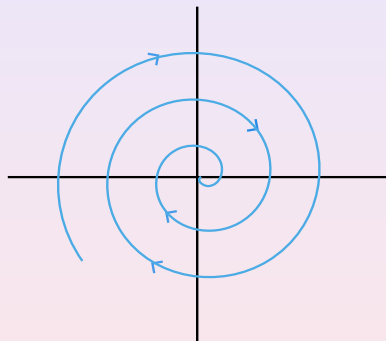
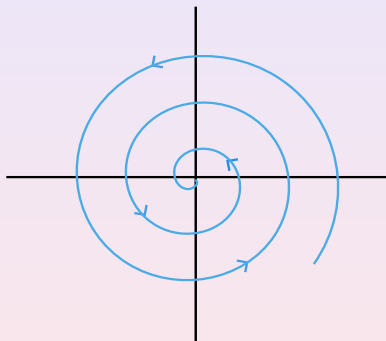
¿Son topológicamente equivalentes dos nodos?



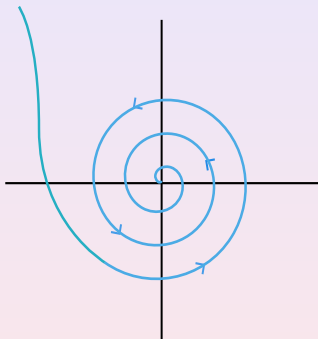
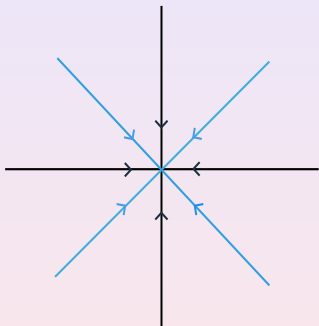
$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ con } \alpha < 0. \text{ FOCO ESTABLE}$$



$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ con } \alpha < 0. \text{ FOCO ESTABLE}$$



¿Son topológicamente equivalentes un nodo y un foco?



Clasificación topológica lineales hiperbólicas

- 1 Silla
- 2 Nodo estable
- 3 Nodo inestable

Teorema de Hartman-Grobman

Sea ξ un campo de vectores de clase C^1 en un abierto U . Supongamos que $0 \in U$ y que es un punto singular de ξ de tipo hiperbólico. Entonces el campo lineal $L_0\xi$ y ξ son topológicamente conjugados en un entorno del origen.

Consecuencia I

Para el caso hiperbólico la parte lineal es un representante del tipo topológico del campo de vectores.

Consecuencia II

Existen tres clases de equivalencia en el caso hiperbólico: silla, nodo estable y nodo inestable.

Teorema de Hartman-Grobman

Sea ξ un campo de vectores de clase \mathcal{C}^1 en un abierto U . Supongamos que $0 \in U$ y que es un punto singular de ξ de tipo hiperbólico. Entonces el campo lineal $L_0\xi$ y ξ son topológicamente conjugados en un entorno del origen.

Consecuencia I

Para el caso hiperbólico la parte lineal es un representante del tipo topológico del campo de vectores.

Consecuencia II

Existen tres clases de equivalencia en el caso hiperbólico: silla, nodo estable y nodo inestable.

Teorema de Hartman-Grobman

Sea ξ un campo de vectores de clase \mathcal{C}^1 en un abierto U . Supongamos que $0 \in U$ y que es un punto singular de ξ de tipo hiperbólico. Entonces el campo lineal $L_0\xi$ y ξ son topológicamente conjugados en un entorno del origen.

Consecuencia I

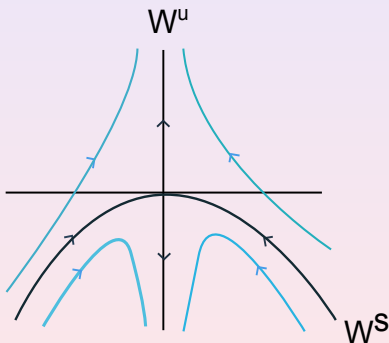
Para el caso hiperbólico la parte lineal es un representante del tipo topológico del campo de vectores.

Consecuencia II

Existen tres clases de equivalencia en el caso hiperbólico: silla, nodo estable y nodo inestable.

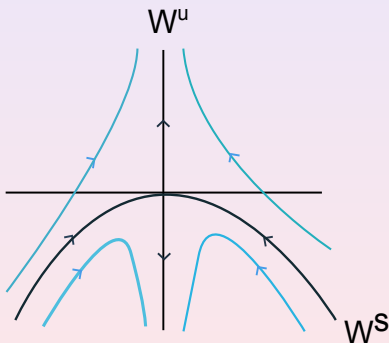
Ejemplo

$$\xi = -x \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + y) \frac{\partial}{\partial y}$$



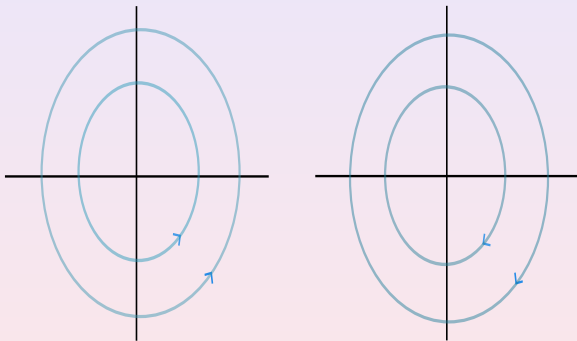
Ejemplo

$$\xi = -x \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + y) \frac{\partial}{\partial y}$$



Singularidades no degeneradas no-hiperbólicas: centro-foco

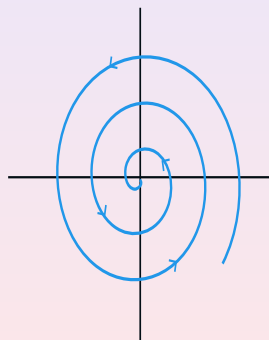
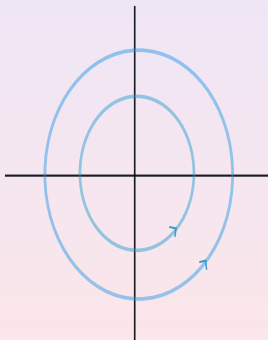
$C = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$ CENTRO (LINEAL) Todas las órbitas regulares son periódicas.



Sin embargo, si consideramos un campo de vectores NO LINEAL cuya parte lineal sea

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

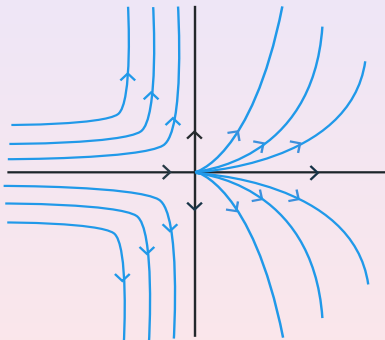
puede tener un comportamiento de tipo centro o de tipo foco.



$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

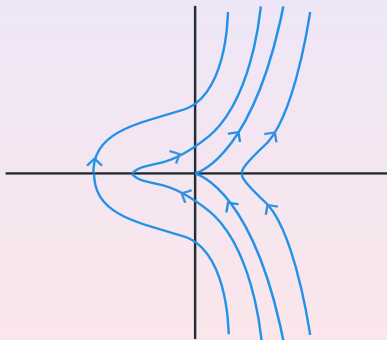
$$\xi = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$$



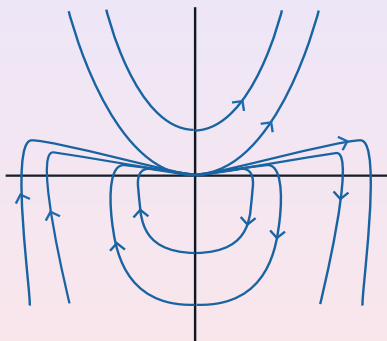
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

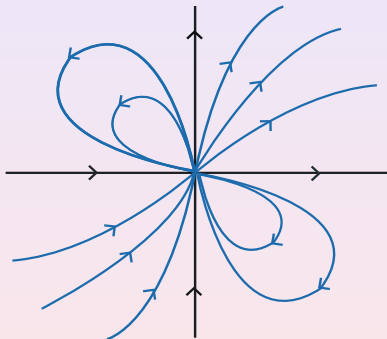
$$\xi = y \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y}$$



$$\xi = y \frac{\partial}{\partial x} + (-x^3 + 4xy) \frac{\partial}{\partial y}$$



$$\xi = (x^2 + xy) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{1}{2}y^2 + xy\right) \frac{\partial}{\partial y}$$



Pregunta 1

¿Podemos clasificar topológicamente las singularidades que no sean hiperbólicas?

Pregunta 2

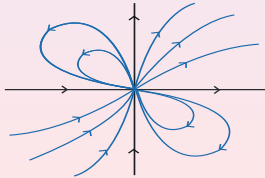
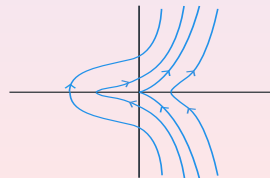
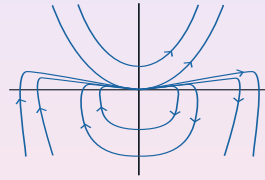
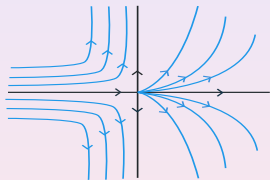
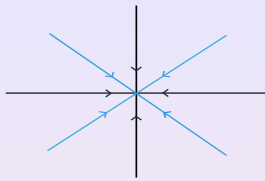
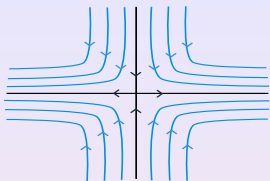
¿Podemos encontrar un representante de cada clase de equivalencia que juegue, para las degeneradas, el papel de la parte lineal en el caso hiperbólico?

Pregunta 1

¿Podemos clasificar topológicamente las singularidades que no sean hiperbólicas?

Pregunta 2

¿Podemos encontrar un representante de cada clase de equivalencia que juegue, para las degeneradas, el papel de la parte lineal en el caso hiperbólico?



Órbita característica

Una *órbita característica* $\gamma(t)$ en el origen es una órbita que tiende al origen en tiempo positivo (o en tiempo negativo) con una tangente bien definida, es decir, existe el límite $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) / \|\gamma(t)\|$

Teorema: Descomposición sectorial de campos de vectores planos

Supongamos que ξ es un campo plano analítico con una singularidad en el origen que no sea de tipo centro-foco. Entonces existe un número finito de órbitas características de ξ en el origen que determinan sectores de tipo hiperbólico, elíptico o parabólico que componen un entorno de la singularidad.

Órbita característica

Una *órbita característica* $\gamma(t)$ en el origen es una órbita que tiende al origen en tiempo positivo (o en tiempo negativo) con una tangente bien definida, es decir, existe el límite $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) / \|\gamma(t)\|$

Teorema: Descomposición sectorial de campos de vectores planos

Supongamos que ξ es un campo plano analítico con una singularidad en el origen que no sea de tipo centro-foco. Entonces existe un número finito de órbitas características de ξ en el origen que determinan sectores de tipo hiperbólico, elíptico o parabólico que componen un entorno de la singularidad.

La *explosión polar* de \mathbb{R}^2 en el origen es el morfismo que consiste en tomar “coordenadas polares”:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\theta, r) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

Consideremos ξ un campo de vectores analítico en \mathbb{R}^2 con una singularidad en el origen.

Sea $\tilde{\xi}$ el campo de vectores definido en el cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ tal que $\phi_*(\tilde{\xi}) = \xi$. Lo llamaremos el *transformado total* de ξ .

Consideremos ξ un campo de vectores analítico en \mathbb{R}^2 con una singularidad en el origen.

Sea $\tilde{\xi}$ el campo de vectores definido en el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ tal que $\phi_*(\tilde{\xi}) = \xi$. Lo llamaremos el *transformado total* de ξ .

Si

$$\xi = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

y

$$k = \min\{\text{ord}(A), \text{ord}(B)\}$$

cuando $k > 1$, el campo $\tilde{\xi}$ se anula en $\{r = 0\}$. Podemos considerar el *transformado estricto* de ξ

$$\bar{\xi} = \frac{1}{r^{k-1}}(\tilde{\xi}).$$

Si $\theta \in (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2)$ usaremos la siguiente carta:

$$\varphi^x : (\theta, r) \mapsto (r \cos \theta, \tan \theta) = (x', y')$$

En esta carta, la expresión de ϕ está dada por

$$\phi^x : (x', y') \mapsto (x', x' y').$$

Se tiene que

$$\phi = \phi^x \circ \varphi^x : (\theta, r) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Llamaremos a ϕ^x *explosión en la dirección de x* .

Si $\theta \in (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2)$ usaremos la siguiente carta:

$$\varphi^x : (\theta, r) \mapsto (r \cos \theta, \tan \theta) = (x', y')$$

En esta carta, la expresión de ϕ está dada por

$$\phi^x : (x', y') \mapsto (x', x'y').$$

Se tiene que

$$\phi = \phi^x \circ \varphi^x : (\theta, r) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Llamaremos a ϕ^x *explosión en la dirección de x* .

Si $\theta \in (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2)$ usaremos la siguiente carta:

$$\varphi^x : (\theta, r) \mapsto (r \cos \theta, \tan \theta) = (x', y')$$

En esta carta, la expresión de ϕ está dada por

$$\phi^x : (x', y') \mapsto (x', x' y').$$

Se tiene que

$$\phi = \phi^x \circ \varphi^x : (\theta, r) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Llamaremos a ϕ^x *explosión en la dirección de x*.

Si $\theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ usamos una carta dada por:

$$\varphi^y : (\theta, r) \mapsto (\cot \theta, r \sin \theta) = (x'', y'')$$

En esta carta, la expresión de ϕ está dada por

$$\phi^y : (x'', y'') \mapsto (x''y'', y'').$$

Se tiene que

$$\phi = \phi^y \circ \varphi^y : (\theta, r) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Llamaremos a ϕ^y *explosión en la dirección de y*

Si $\theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ usamos una carta dada por:

$$\varphi^y : (\theta, r) \mapsto (\cot \theta, r \sin \theta) = (x'', y'')$$

En esta carta, la expresión de ϕ está dada por

$$\phi^y : (x'', y'') \mapsto (x''y'', y'').$$

Se tiene que

$$\phi = \phi^y \circ \varphi^y : (\theta, r) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Llamaremos a ϕ^y *explosión en la dirección de y*

Si $\theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ usamos una carta dada por:

$$\varphi^y : (\theta, r) \mapsto (\cot \theta, r \sin \theta) = (x'', y'')$$

En esta carta, la expresión de ϕ está dada por

$$\phi^y : (x'', y'') \mapsto (x''y'', y'').$$

Se tiene que

$$\phi = \phi^y \circ \varphi^y : (\theta, r) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Llamaremos a ϕ^y *explosión en la dirección de y*

Denotaremos por $\tilde{\xi}^x$ y $\tilde{\xi}^y$ respectivamente los transformados totales de ξ por ϕ^x y ϕ^y . En las cartas respectivas se expresan:

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}^x &= A(x', x' y') \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{1}{x'} (B(x', x' y') - y' A(x', x' y')) \frac{\partial}{\partial y'} \\ \tilde{\xi}^y &= \frac{1}{y''} (A(x'' y'', y'') - x'' B(x'' y'', y'')) \frac{\partial}{\partial x''} + B(x'' y'', y'') \frac{\partial}{\partial y''}\end{aligned}$$

La ecuación del divisor excepcional es $\{x' = 0\}$ e $\{y'' = 0\}$ respectivamente en cada carta.

Podemos definir los transformados estrictos respectivos:

$$\bar{\xi}^x = \frac{1}{x'^{k-1}} \tilde{\xi} \quad \bar{\xi}^y = \frac{1}{y''^{k-1}} \tilde{\xi}.$$

La ecuación del divisor excepcional es $\{x' = 0\}$ e $\{y'' = 0\}$ respectivamente en cada carta.

Podemos definir los transformados estrictos respectivos:

$$\bar{\xi}^x = \frac{1}{x'^{k-1}} \tilde{\xi} \quad \bar{\xi}^y = \frac{1}{y''^{k-1}} \tilde{\xi}.$$

Alternativa

Añadir dos explosiones direccionales adicionales para trabajar respectivamente en $x' < 0$ e $y'' < 0$

$$\begin{aligned}\phi^{-x} : (x', y') &\mapsto (-x', -x'y') \\ \phi^{-y} : (x'', y'') &\mapsto (-x''y'', -y'')\end{aligned}$$

Foliación transformada estricta

Los transformados estrictos $\bar{\xi}^x$ y $\bar{\xi}^y$ generan la misma foliación en la intersección de las cartas: si \mathcal{F}_ξ es la foliación generada por el campo ξ en un entorno del origen, podemos hablar de la *foliación $\phi^*\mathcal{F}_\xi$, transformada estricta de \mathcal{F}_ξ por ϕ* en el cilindro.

Si el origen es un punto singular aislado de ξ , $\phi^*\mathcal{F}_\xi$ sólo tiene un número finito de puntos singulares en el divisor D . Hay dos posibilidades:

- 1 - Caso *no-dicrítico*: D es invariante por $\phi^*\mathcal{F}_\xi$
- 2 - Caso *dicrítico*: D es transversal a las hojas regulares de $\phi^*\mathcal{F}_\xi$ en casi todos los puntos.

Foliación transformada estricta

Los transformados estrictos $\bar{\xi}^x$ y $\bar{\xi}^y$ generan la misma foliación en la intersección de las cartas: si \mathcal{F}_ξ es la foliación generada por el campo ξ en un entorno del origen, podemos hablar de la *foliación $\phi^*\mathcal{F}_\xi$, transformada estricta de \mathcal{F}_ξ por ϕ* en el cilindro.

Si el origen es un punto singular aislado de ξ , $\phi^*\mathcal{F}_\xi$ sólo tiene un número finito de puntos singulares en el divisor D . Hay dos posibilidades:

- 1 - Caso *no-dicrítico*: D es invariante por $\phi^*\mathcal{F}_\xi$
- 2 - Caso *dicrítico*: D es transversal a las hojas regulares de $\phi^*\mathcal{F}_\xi$ en casi todos los puntos.

Foliación transformada estricta

Los transformados estrictos $\bar{\xi}^x$ y $\bar{\xi}^y$ generan la misma foliación en la intersección de las cartas: si \mathcal{F}_ξ es la foliación generada por el campo ξ en un entorno del origen, podemos hablar de la *foliación $\phi^*\mathcal{F}_\xi$, transformada estricta de \mathcal{F}_ξ por ϕ* en el cilindro.

Si el origen es un punto singular aislado de ξ , $\phi^*\mathcal{F}_\xi$ sólo tiene un número finito de puntos singulares en el divisor D . Hay dos posibilidades:

- 1 - Caso *no-dicrítico*: D es invariante por $\phi^*\mathcal{F}_\xi$
- 2 - Caso *dicrítico*: D es transversal a las hojas regulares de $\phi^*\mathcal{F}_\xi$ en casi todos los puntos.

Foliación transformada estricta

Los transformados estrictos $\bar{\xi}^x$ y $\bar{\xi}^y$ generan la misma foliación en la intersección de las cartas: si \mathcal{F}_ξ es la foliación generada por el campo ξ en un entorno del origen, podemos hablar de la *foliación $\phi^*\mathcal{F}_\xi$, transformada estricta de \mathcal{F}_ξ por ϕ* en el cilindro.

Si el origen es un punto singular aislado de ξ , $\phi^*\mathcal{F}_\xi$ sólo tiene un número finito de puntos singulares en el divisor D . Hay dos posibilidades:

- 1 - Caso *no-dicrítico*: D es invariante por $\phi^*\mathcal{F}_\xi$
- 2 - Caso *dicrítico*: D es transversal a las hojas regulares de $\phi^*\mathcal{F}_\xi$ en casi todos los puntos.

Explosión no orientada

Si en $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ se identifican los puntos cuya imagen por ϕ coincide se obtiene, por paso al cociente, una variedad M y un *morfismo de explosión (proyectivo)*

$$\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

- 1 M es una variedad analítica real (la banda de Möbius no acotada)
- 2 π es una aplicación analítica *propia* que restringe a un isomorfismo entre $M \setminus \pi^{-1}(0)$ y $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
- 3 El *divisor excepcional de la explosión*, $D = \pi^{-1}(0)$, es isomorfo a la recta proyectiva real $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$.

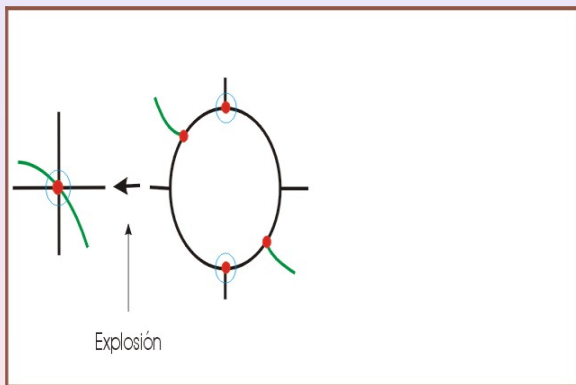
Explosión no orientada

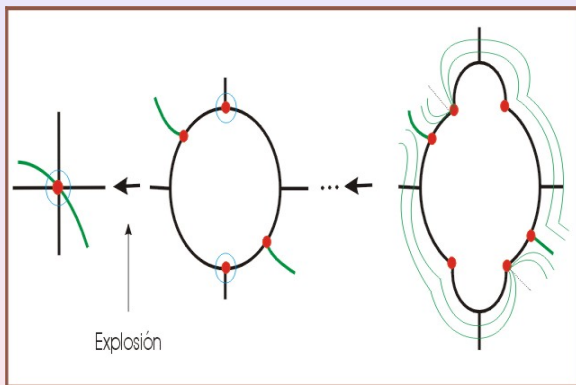
Si en $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ se identifican los puntos cuya imagen por ϕ coincide se obtiene, por paso al cociente, una variedad M y un *morfismo de explosión (proyectivo)*

$$\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

- 1 M es una variedad analítica real (la banda de Möbius no acotada)
- 2 π es una aplicación analítica *propia* que restringe a un isomorfismo entre $M \setminus \pi^{-1}(0)$ y $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
- 3 El *divisor excepcional de la explosión*, $D = \pi^{-1}(0)$, es isomorfo a la recta proyectiva real $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$.







Pregunta

¿Es posible encontrar una secuencia de explosiones tal que todas las singularidades finales sean elementales?

Reducción de singularidades en el plano

Sea ξ un campo de vectores analítico plano tal que el origen es una singularidad aislada de ξ . Entonces existe una secuencia finita de explosiones de puntos $\Pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ cada una de ellas centrada en un punto singular de la foliación transformada estricta de la etapa anterior de manera que:

- 1 La foliación transformada estricta final $\Pi^* \mathcal{F}_\xi$ tiene únicamente singularidades simples.
- 2 Las componentes del divisor excepcional son o bien invariantes por $\Pi^* \mathcal{F}_\xi$ o bien transversales a las hojas de $\Pi^* \mathcal{F}_\xi$.

Pregunta

¿Es posible encontrar una secuencia de explosiones tal que todas las singularidades finales sean elementales?

Reducción de singularidades en el plano

Sea ξ un campo de vectores analítico plano tal que el origen es una singularidad aislada de ξ . Entonces existe una secuencia finita de explosiones de puntos $\Pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ cada una de ellas centrada en un punto singular de la foliación transformada estricta de la etapa anterior de manera que:

- 1 La foliación transformada estricta final $\Pi^* \mathcal{F}_\xi$ tiene únicamente singularidades simples.
- 2 Las componentes del divisor excepcional son o bien invariantes por $\Pi^* \mathcal{F}_\xi$ o bien transversales a las hojas de $\Pi^* \mathcal{F}_\xi$.

- 1 Determina la descomposición sectorial del campo

$$\xi = (yx + x^3)\frac{\partial}{\partial x} + (x^2y - 2y^2)\frac{\partial}{\partial y}$$

- 2 Determina la verdad o falsedad de la siguiente afirmación:

Si dos campos de vectores no tienen la misma reducción de singularidades, no pueden tener descomposiciones sectoriales homeomorfas.

Singularidades de campos de vectores reales: perfil topológico (I)

Clementa Alonso González

VI Escuela Doctoral de Matemáticas PUCP-UVA 2013